12/7/2023

جزوه مبانی برق ۱

استاد محمدرضا دوست محمدیان

جزوه مبانی برق ۱

مبانی برق ۱ – جلسه اول

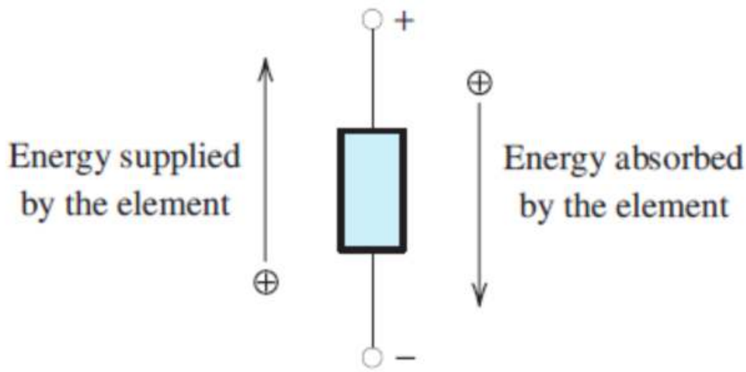
ولتاژ :

همانطور که میدانید برای انجام هر حرکتی نیاز به انرژی است. پدید آمدن جریان در یک مدار به این معنی است منبعی با دادن انرژی جنبشی به الکترون ها عامل این حرکت بوده و نماد الکتریکی آن V است و واحد اندازه گیری آن ولت است

با برقراری یک مسیر هادی به الکترون های موجود در قطب منفی به دلیل نیروی دافعه و از سویی نیروی جاذبه بار های مثبت در قطب مثبت به حرکت در می آیند و در مسیر هادی جریان پیدا میکنند. به این ترتیب انرژی شیمیایی موجود در باتری به انرژی الکتریکی تبدیل می شود .

معیاری برای سنجش انرژی مورد نیاز برای پدید آمدن جریان ، پارامتر ولتاژ است که طبق تعریف عبارت است از مقدار انرژی لازم برای انتقال یک کولن بار از نقطه a به نقطه b در یک مدار ، توجه شود که ولتاژ یک پارامتر نسبی است یعنی نسبت به یک نقطه سنجیده می شود. در واقع همواره V_{ab} (ولتاژ a نسبت به b) صحبت می کنیم نه به ولتاژ a.

- در یک المان الکتریکی اگر بار مثبت از قطب مثبت به قطب منفی جریان داشته باشد المان در حال جذب انرژی الکتریکی است و در غیر این صورت المان در حال تولید انرژی الکتریکی است.



توان و انرژی :

- جریان، در مدار نرخ انتقال بار و ولتاژ V، معیار میزان انرژی مستقل است به ازای واحد بار الکتریکی می باشد. حاصلضرب جریان و ولتاژ نرخ انتقال انرژی را بیان می کند که توان نامیده میشود

$P = VI$ $\qquad$ $Volt \times Amper = Joules \,/\, Second$

$= Watts$

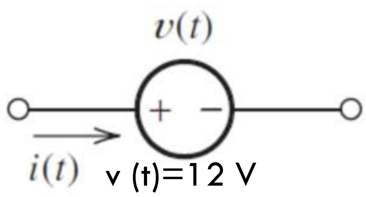
اگر جریان و ولتاژ در حالت کلی تابعی از زمان باشد داریم: $P(t) = V(t).\, i(t)$

انرژی: برای محاسبه انرژی منتقل شده به یک المان w بین زمان های t_1 و t_2 از توان انتگرال میگیریم:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt$$

مثال :

برای المان زیر توان مصرفی را محاسبه کنید مقدار انرژی مصرفی در بازه زمانی $t_1 = 0$ و $t_2 = \infty$ را محاسبه کنید



v (t)=12 V

i (t)=2e^{-t}A

$P(t) = v(t) \,.\, i(t) = 24\, e^{-t}\ w$

$w = \int_0^{\infty} p(t) = \int_0^{\infty} 24\, e^{-t}\ dt =$

$-24\, e^{-t} \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} = 24\, j$

مبانی برق ۱ – جلسه اول

جریان :

- حرکت الکترون ها در یک هادی (سیم) تحت نیروی محرکه باتری را جریان الکتریکی می گویند که آن را با I نشان می دهند و واحد آمپر(A) است.

در واقع جریان برابر است با آهنگ زمانی (مشتق) عبور بار از سطح واحد $(A)\ I = \frac{dq}{dt}\ \left(\frac{c}{s}\right)$

- جهت قراردادی جریان در جهت حرکت بار های مثبت تعریف شده است (به صورت قراردادی). هر چند میدانیم در صورت داشتن رسانای فلزی جریان الکتریسیته ناشی از عبور بار های منفی (الکترون ها) از جهت ترمینال منفی باتری به ترمینال مثبت باتری است .

- یک سیم مانند دالانی میماند که در یک دوره زمانی مشخص تعدادی معینی از افراد میتوانند از آن عبور کنند یعنی برای اینکه در دوره زمانی مشخص مثلا ۱ دقیقه افراد بیشتری از دالان عبور کنند باید سرعت حرکت آن ها بیشتر شود در نتیجه در اثر برخورد با هم و با دیواره دالان باعث اصطکاک و گرما می شود و در سیم نیز چنین اتفاقی می افتد یعنی اگر بخواهیم تعداد الکترون های در حال حرکت را افزایش دهیم (جریان را افزایش دهیم) سرعت الکترون ها و نیز تعداد الکترون هایی که همرا با هم از سیم عبور می کنند افزایش می یابد در نتیجه اصطکاک افزایش یافته و تولید گرما میکند . اگر این گرمایش از حد مجاز باشد باعث ذوب شدن سیم می شود.

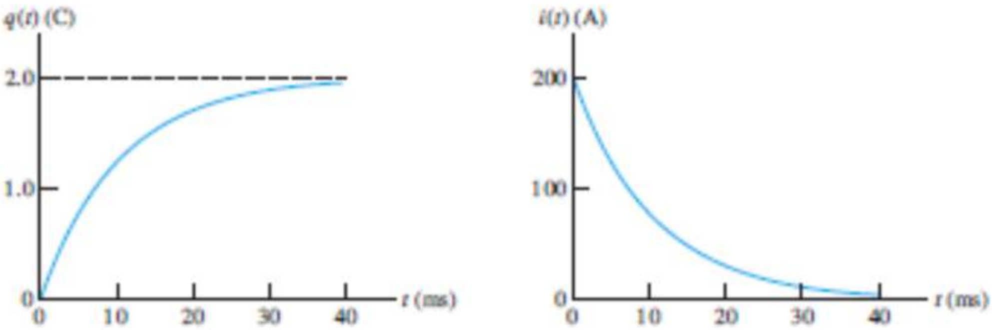
- مقدار بار عبوری با انتگرال گیری از جریان بدست می آید.

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i(t)dt + qt0$$

مثال:

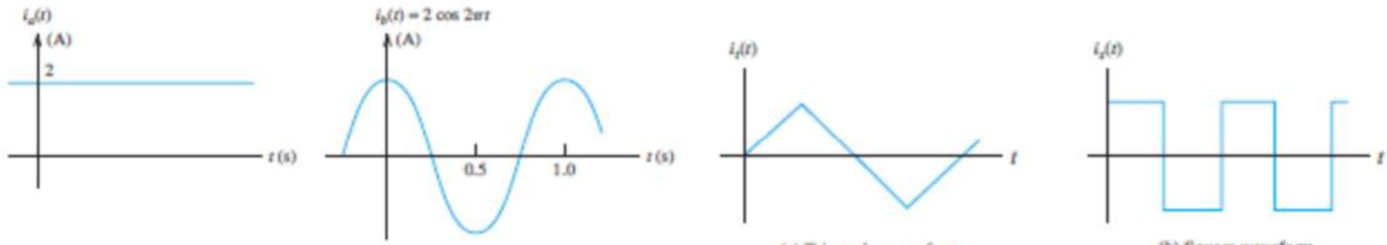
$$q(t) = 0 \quad , \quad t < 0 \quad , \quad q(t) = 2 - 2e^{-100t}(c)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 200e^{-100t}(A) \quad t > 0$$



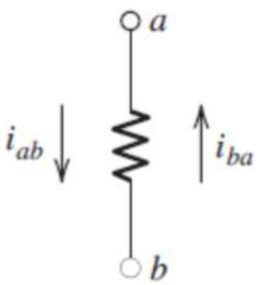
انواع جریان :

اگر جریان نسبت به زمان ثابت باشد آن را جریان مستقیم (Direct Current) یا DC می گوییم . در طرف مقابل اگر جریان با زمان تغییر کند ، به طوری که بطور دوره ای و متناوب جهت آن عوض شود آن را جریان متناوب(Alternating Current) یا AC گوییم . در واقع وقتی جریان منفی می شود ، جریان ، در جهت عکس جریان دارد که مثال های آن در زیر آورده شده است:



(a) Dc current (b) Ac current (a) Triangular waveform (b) Square waveform

➢ به جای نشان دادن جهت جریان روی مدار، می توان با زیرنویس جهت جریان را نشان داد. به طور مثال i_{ab} نشان دهنده جریان از a به b است و i_{ba} نشان دهنده جریان از b به a است.



$$i_{ab} = -i_{ba}$$

اجزای مدار :

هادی ها (Conductor) : بهترین مثال از هادی ها، سیم هایی هستند که اجزای مدار را به هم متصل میکنند . در حالت ایده آل فرض می شود که ولتاژ بین دو نقطه هادی بدون تغییر باقی بماند و افت ولتاژ برابر با صفر است و انرژی در هادی تلف نمی شود . اگر دو نقطه از مدار با یک هادی ایده آل به هم متصل شده باشند میگوییم آن دو نقطه اتصال کوتاه (Short Circuit) شده اند .

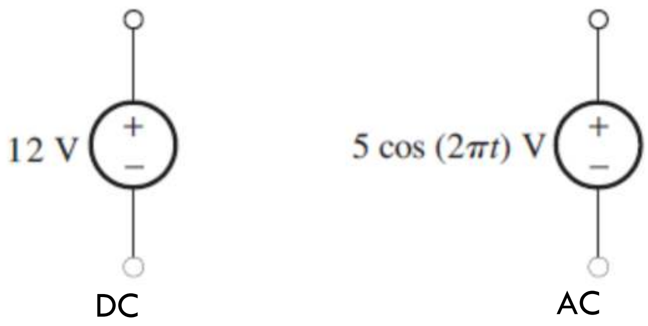
تمام نقاط یک مدار که با یک هادی ایده آل متصل شده اند را می توان بصورت یک نقطه یا نود در نظر گرفت .

اگر هیچ هادی یا المان دیگری بین دو نقطه از مدار نباشد گوییم حالت مدار باز **(Open Cricuit)** شده است.

منبع ولتاژ (Voltage source)

یک منبع ولتاژ ایده آل ، یک ولتاژ مشخص را بین دو ترمینال خود ایجاد میکند (مستقل از سایر المان های مدار یا جریانی که از آن میگذرد)

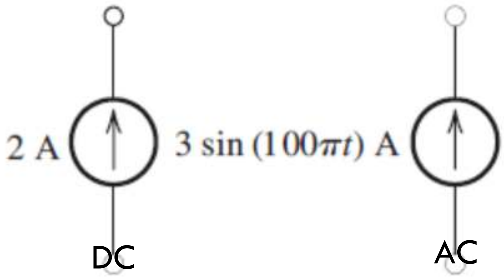
اگر ولتاژ دو سر ترمینال ثابت باشد آنرا منبع ولتاژ DC گوییم و اگر ولتاژ دو سر ترمینال متغییر از زمان (متناوب) باشد آن را AC می گوییم.



منبع جریان (Current Source) :

یک منبع جریان ایده آل ، مقدار مشخصی جریان الکتریکی را بین دو ترمینال خود جریان می دهد . این جریان مستقل از سایر المان های متصل به آن و یا ولتاژ دو سر آن می باشد . یک باتری مثال خوبی برای یک منبع ولتاژ است ولی برای منبع جریان مثال آشنا وجود ندارد بلکه مدل های ایده آل این منابع با استفاده از تقویت کننده ها ساخته می شوند.

اگر جریان منبع ثابت باشد آن را منبع جریان DC و اگر متغییر با زمان و تناوبی باشد آن را AC می نامیم.



مقاومت:

ولتاژ در سر این المان الکتریکی (در حالت ایده آل) متناوب با جریان آن است که به قانون اهم ، هم معروف است :

$$V = Ri$$

که R بیانگر مقاومت المان در برابر جریان الکتریکی است و واحد آن اهم است .$(\Omega = \dfrac{V}{A})$

اگر رابطه مقاومت اهم را برای جریان بنویسیم داریم $\mathrm{i} = \dfrac{1}{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{V}$ که کمیت $G = \frac{1}{R}$ رسانایی نامیده میشود و واحد آن$(\ \Omega^{-1}\ )$ است.

یک مقاومت الکتریکی بطور معمول به شکل یک استوانه با سطح مقطع A است وبا طول L که در این حالت مقدار مقاومت الکتریکی از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$R = \frac{pL}{A}$$

که p کمیتی است که با نام مقاومت ویژه شناخته میشود و بر اساس جنس تعیین میشود و واحد (Ωm) است.

مثال :

مقاومت الکتریکی یک سیم مسی با قطر 205mm و طول 10m را تعیین کنید.

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(2.05 \times 10^{-3})^2}{4} = 3.3 \times 10^{-6} m^2$$

$$R = \frac{pL}{A} = \frac{1.72 \times 10^{-8} \times 10}{3.3 \times 10^{-6}} = 0.052\,\Omega$$

که این مقدار، مقدار ناچیزی است.

توان مصرف شده توسط مقاومت الکتریکی برابر است با $P = V.i = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$

مثال :

یک گرمکن برقی با توان 1500w تحت ولتاژ 120v کار میکند . مقاومت و جریان عبوری از گرمکن را بیابید ؟

$$R = \frac{v^2}{P} = \frac{120^2}{1500} = 9.6\,\Omega \qquad i = \frac{v}{R} = \frac{120}{9.6} = 12.5\,A$$

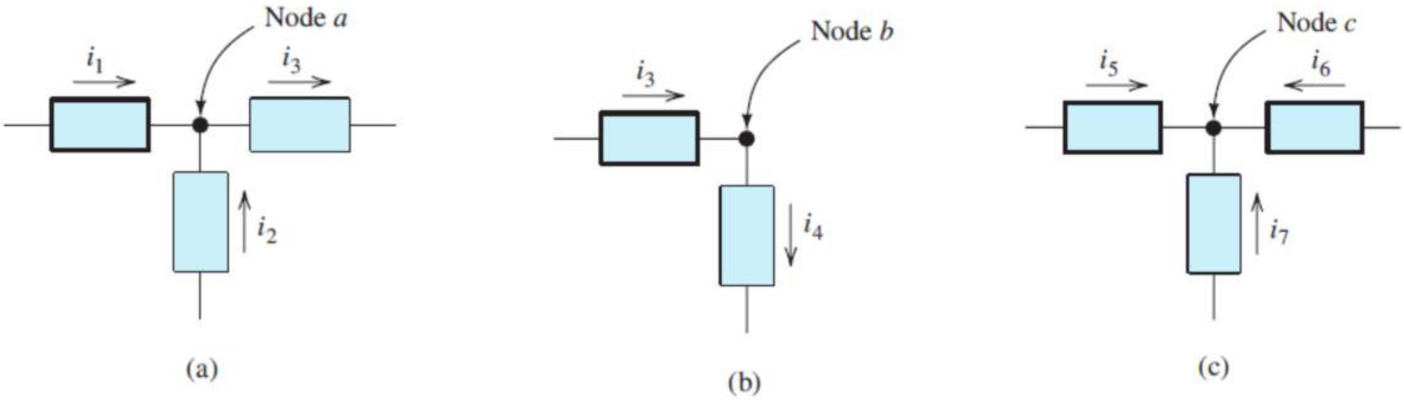
مبانی برق ۱ – جلسه دوم

قوانین کیرشهف(kirchhoffs law)

یک نود در یک مدار الکتریکی نقطه ای است که از آن دو یا چند المان الکتریکی بهم متصل هستند.

یک اصل مهم در مدار های الکتریکی قانون جریان کیرشهف (kirchhoffs circuit law) است که بیان می کند که مجموع جریان های ورودی به یک نود صفر است. در این حالت جریان های ورودی به یک نود با علامت مثبت و جریان های فرعی با علامت منفی جمع می شود .

مثال :



$KCL:$ $i_1 + i_2 - i_3 = 0$ $\quad$ $i_3 - i_4 = 0$ $\quad$ $i_5 + i_6 + i_7 = 0$

قانون KCL می توان به شکل های دیگرهم عنوان کرد:

- مجموع جریان های خروجی از یک نود صفر است. در این حالت جریان های خروجی را با علامت مثبت و جریان های ورودی را با علامت منفی در نظر میگیریم.

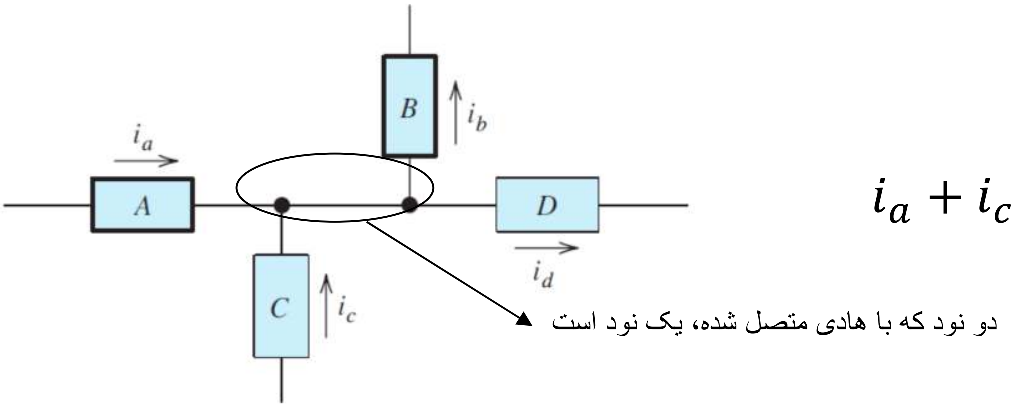
$$Node\ a: -i_1 - i_2 + i_3 = 0 \quad , Node\ b: -i_3 + i_4 = 0 \quad , Node\ c: -i_5 - i_6 - i_7 = 0$$

- مجموع جریان های ورودی برابر با مجموع جریان های خروجی است:

$$\text{Node a}: i_1 + i_2 = i_3 \quad , \quad Node\ b: i_3 = i_4 \quad , \quad Node\ c: i_5 + i_6 + i_7 = 0$$

پایه فیزیکی قانون KCL بر این مبنا است که در صورت عدم صفر بودن مجموع جریان های ورودی به یک نود، در آن نود تجمع بار خواهیم داشت بطور مثال در مدار اگر داشته باشیم
$i_1 + i_2 - i_3 = 1A = 1\frac{C}{S}$ بعد از یک ثانیه یک کولن بار در این نوع نود جمع خواهد شد و بنابراین در جایی دیگر از مدار باید منفی یک کولن تجمع بار داشته باشیم. در اثر نیروی جاذبه ایجاد شده بین این دو بار جریانی بین آن دو برقرار خواهد شد که باعث تغییر مقادیر جریان ورودی و خروجی نود a خواهد شد. در واقع KCL بیان می کند که این بار های اضافی در نود ها قابل تشکیل نیستند.

➢ تمام نقاط موجود در یک مدار که با یک هادی به هم متصل هستند میتوان به عنوان یک نود در نظر گرفت.



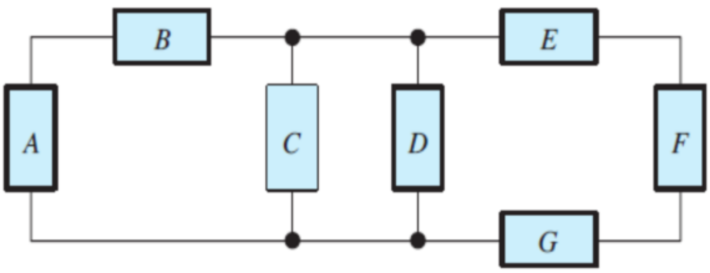
$$i_a + i_c = i_b + i_d$$

➢ مدار های سری، طبق تعریف در المان سری
هستند اگر تنها یک جریان از نود مستقل کننده در المان عبور کند بنابراین جریان عبوری از المان سری برابر است.

قانون ولتاژ کیرشهف (kirchhoffs voltage law) یا (KVL) :

یک حلقه (loop) در یک مدار الکتریکی یک مسیر بسته است که از یک نود شروع شده و پس از عبور از المان های مدار در نهایت به همان نود برمیگردد.

به طور مثال :

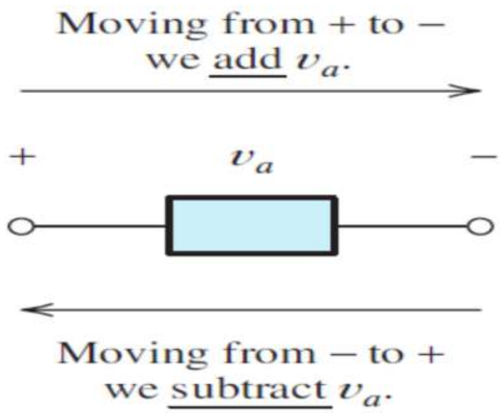


$$loop1: A - B - C$$

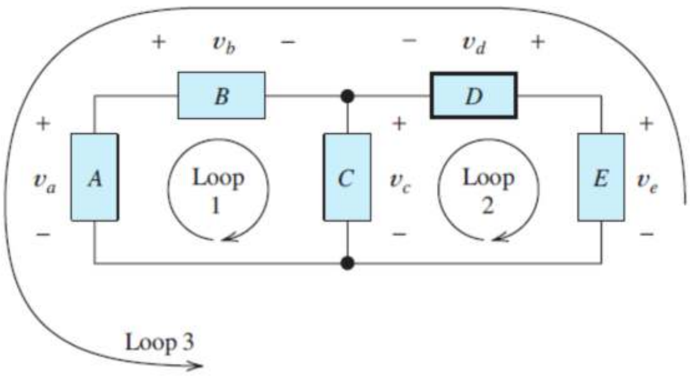
$$loop2: D - E - F - G$$

$$loop\ 3: A - B - E - F - G$$

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) بیان می کند که مجموع ولتاژهای المان های هر حلقه بسته در مدار الکتریکی برابر با صفر است. ولی برای این منظور اگر از سر مثبت یک المان الکتریکی وارد شدیم آن را با علامت مثبت در نظر میگیریم و اگر از سر منفی وارد شدیم ولتاژ آنرا با علامت منفی در نظر میگیریم.



به طور مثال :

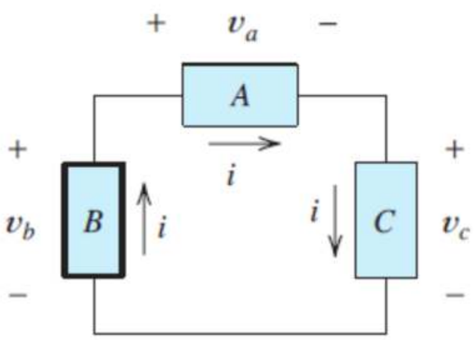


$$loop\ 1: -v_a + v_b + v_c = 0$$
$$loop\ 2: -v_c - v_d + v_e = 0$$
$$loop\ 3: v_a - v_b + v_d - v_e = 0$$

- مبنای قانون kVL بقای انرژی است.

مثال :

مدار مقابل را در نظر بگیرید :



$Element\ A: P_a = V_a . i$ ← توان مصرف نمی کند

$Element\ B: P_b = -V_b . i$ ← توان تولید می کند

$Element\ C: P_c = V_C . i$ ← توان مصرف می کند

طبق قانون بقای انرژی در یک نقطه مجموع توان های همه المان ها در یک مدار باید صفر باشد در غیر این صورت مقدار انرژی تولید شده در یک برهه از زمان از مقدار انرژی مصرفی بیشتر است (یا برعکس).

$$P_a + P_b + P_c = 0$$

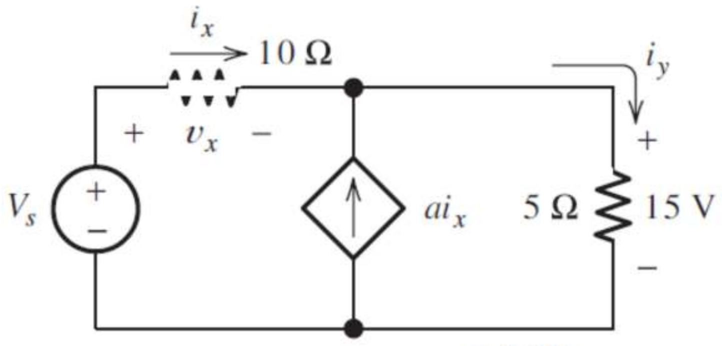
$$\Rightarrow \quad i\,V_a - iV_b + iV_c = 0 \quad \Rightarrow \quad V_a - V_b + V_C = 0$$

مدار های موازی :

دو المان موازی هستند اگر هر دو انتهای یکی مستقیما به دو انتهای دیگری وصل باشد، بنابراین طبق قانون KVL ولتاژ دو سر این دو المان برابر بوده و دارای قطب های مثبت و منفی یکسان هستند.

مثال :

مدار شکل مقابل را در نظر بگیرید مقدار منبع ولتاژ را محاسبه کنید. (ولتاژ دو سر مقاومت $R_2 = 15\ V$ است).



$a = 0.5A/A$

قانون اهم : $v_x = i_x \times 10$

$15 = i_y \times 5$

$i_y = 3A$

$v_x = 20V$

$KCL: i_y = i_x + 0.5i_x$

$KVL: -v_s + v_x + 15 = 0$

$$i_x = \frac{3}{1.5} = 2A$$

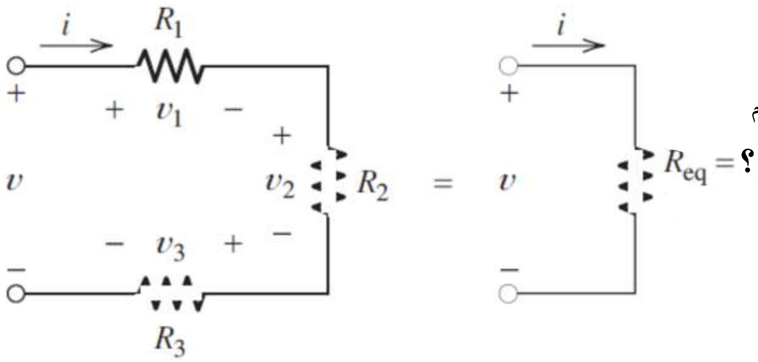
$v_s = 15 + 20 = 35V$

مدار های مقاومتی (Resistive circuits) :

مقاومت های سری :

هدف جایگزینی مقاومت های سری در یک مدار با یک مقاومت معادل است.

با یک مثال توضیح میدهیم :



قانون اهم

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i \\ v_2 = R_2 i \quad KVL: v = v_1 + v_2 + v_3 \\ v_3 = R_3 i \end{cases}$$

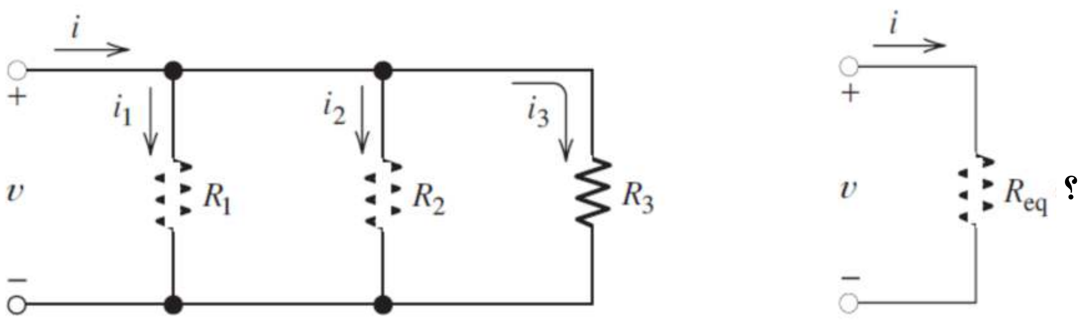
$$\left.\begin{aligned} v &= iR_1 + iR_2 + iR_3 = i(R_1 + R_2 + R_3) \\ v &= iR_{eq} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = R_1 + R_{2+} R_3}$$

➢یک ترکیب سری از مقاومت های قابل جایگزینی یا مقاومت معادل برابر با مجموع مقاومتهاست.

مقاومت های موازی:

هدف جایگزینی مقاومت های موازی در یک مدار با یک مقاومت معادل است.

با یک مثال توضیح میدهیم :



قانون اهم

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{v}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{v}{R_2} \qquad KCL: i = i_1 + i_2 + i_3 \end{cases}$$

$$i_3 = \frac{v}{R_3}$$

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \\ i &= \frac{v}{R_{eq}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{1}{{}^{1}/_{R_1} + {}^{1}/_{R_2}\, {}^{1}/_{R_3}}}$$

- یک ترکیب موازی از مقاومت ها قابل جایگزینی با مقاومت معادل بر اساس رابطه فوق است.

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

رسانایی (G) در حالت سری و موازی:

طبق تعریف رسانایی G عکس مقاومت R است بنابراین می توان نوشت که رسانایی معادل برای ترکیبی از رسانایی های سری به شکل زیر بدست می آید :

$$\boxed{G_{eq} = \frac{1}{1/G_1 + 1/G_2 + \cdots + 1/G_n}}$$

در حالت موازی رسانایی معادل به شکل زیر بدست می آید :

$$\boxed{G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$$

- یک المان در مدار الکتریکی مثل یک لامپ یا یک اتو به عنوان بار (load) در مدار شناخته می شود.

اگر بخواهیم توان را از یک منبع ولتاژ بین المان های الکتریکی تقسیم کنیم آنها را به صورت موازی به منبع ولتاژ وصل میکنیم و هر یک را با یک سوئیچ کنترل می کنیم. این سوئیچ سری با المان الکتریکی

میتواند جریان مدار در آن المان را قطع و وصل کند بدون اینکه روی ولتاژ سایر المان های مدار اثر بگذارد.

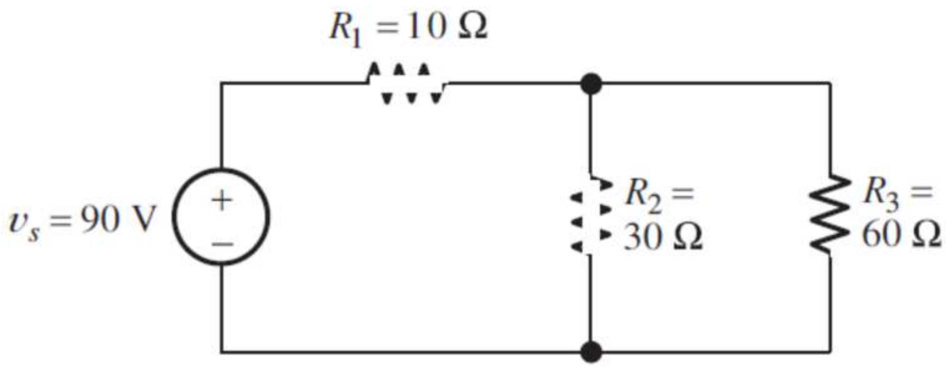
آنالیز شبکه (Network Analysis) :

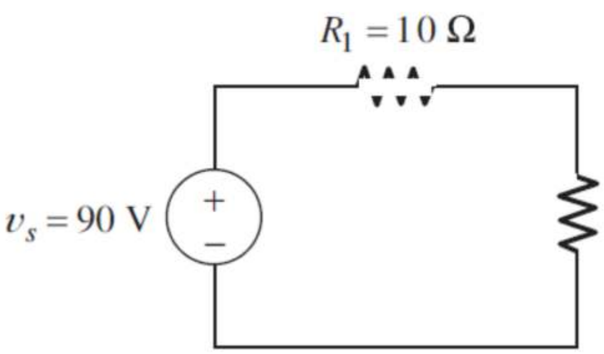
آنالیز شبکه پروسه تعیین جریان ولتاژ و توان برای هر یک از المان های مدار الکتریکی میباشد. برای تحلیل آنالیز شبکه معمولا از معادل سری یا موازی مقاومت های مدار به شکل زیر استفاده می شود:

۱. ترکیبی سری یا موازی از مقاومت ها را مشخص کنید. بهتر است از نقاط دور تر از منبع شروع کنید.
۲. دیاگرام مدار را با قرار دادن معادل های مقاومتی دوباره بکشید.
۳. مراحل ۱ و ۲ را تا حد امکان تکرار کنید تا مدار ساده شود (ساده ترین مدار شامل یک منبع و یک مقاومت است).
۴. مقادیر ولتاژ و جریان را در مدار ساده شده نهایی بیابید. مرحله به مرحله به عقب برگردید و ولتاژ ها و جریان های مجهول را بدست آورید تا زمانی که تمام جریان ها و ولتاژ ها مشخص شوند.
۵. نتایج را با KVL و KCL چک کنید و توجه کنید که جمع توان ها می بایست صفر شود.

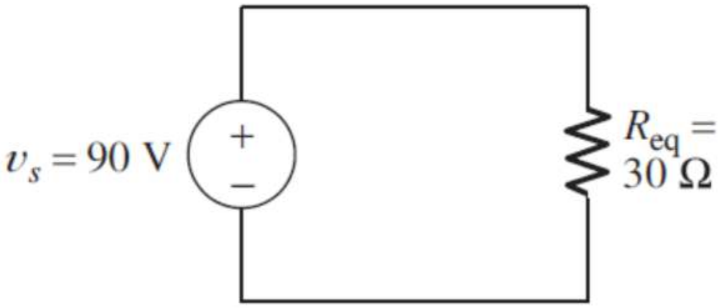
مثال :

ولتاژ و جریان و توان هر یک از المان های مدار زیر را تعیین کنید.



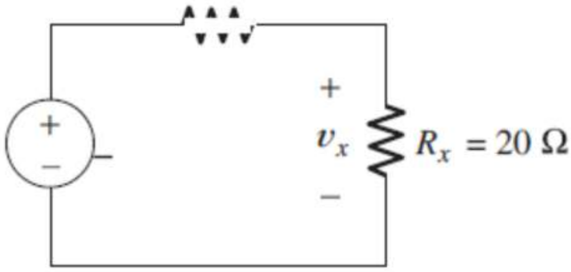


$$R_{eq1} = \frac{1}{1/60 + 1/30} = \frac{60 \times 30}{60 + 30} = 20\Omega$$



$$i_1 = \frac{v_s}{R_{eq}} = \frac{90\ V}{30\ \Omega} = 3\ A$$

$$R_1 =$$



10Ω

$$V_2 = R_{eq1} \times i_1 = 20 \times 3 = 60v$$

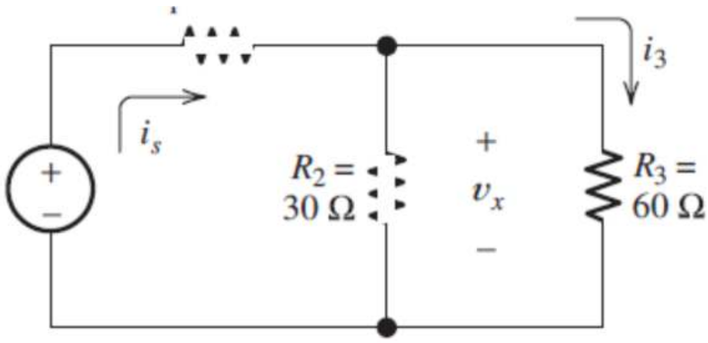
Vs

$$i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$i_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{60}{60} = 1A$$

R_1=10Ω

Vs



$$V_1 = i_1 \times R_1 = 3 \times 10 = 30v$$

برای چک کردن میتوان از KVL و KCL استفاده کرد :

$$KCL: i_1 = i_2 + i_3$$

$$KVL: v_s = v_1 + v_2$$

برای محاسبه توان ها :

$$P_s = -v_s i_1 = -90v \times 3A = -270w$$

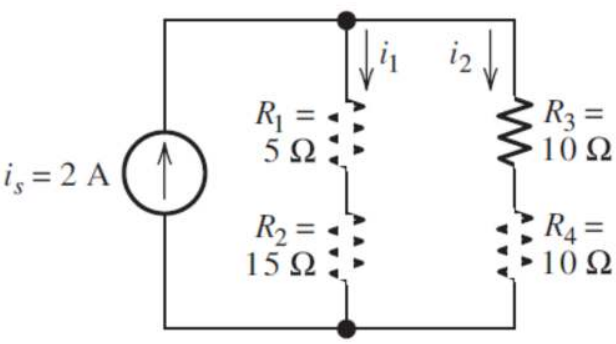
$$P_1 = R_1 i_1^2 = 10 \times 3^2 = 90w \qquad P_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{60^2}{30} = 120w \qquad P_3 = \frac{v_2^2}{R_3} = \frac{60^2}{60} = 60w$$

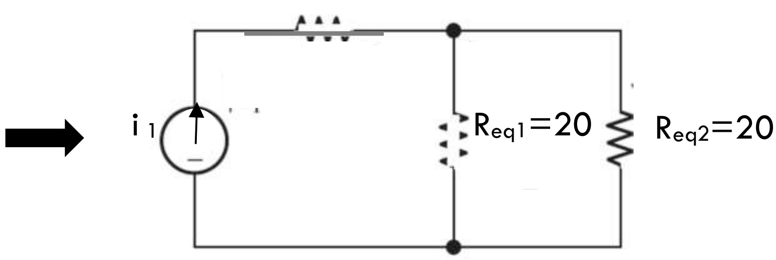
برای چک کردن میتوان از این قانون، که جمع توان ها می بایست صفر باشد استفاده کرد:

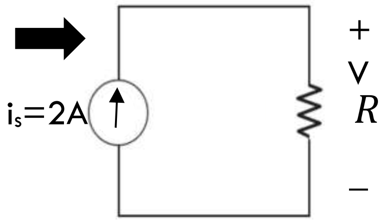
$$P_s + P_1 + P_2 + P_3 = 0$$

مثال :

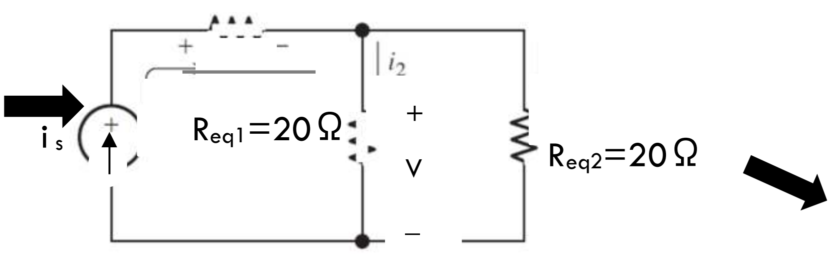
برای مدار های زیر جریان را در المان های مختلف بدست آورید.





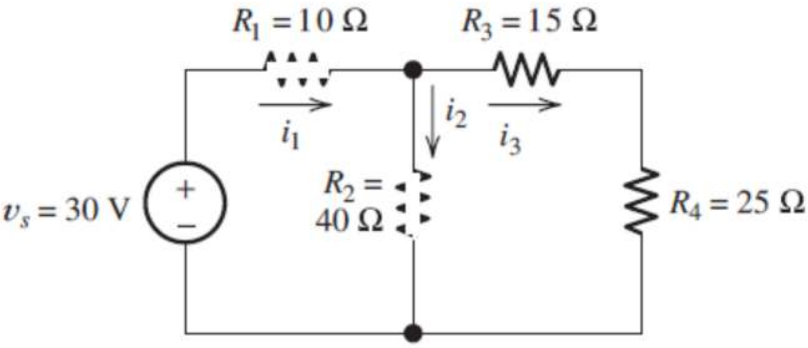


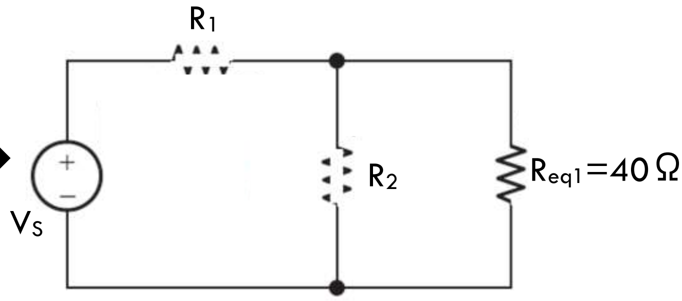
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = 10\Omega \qquad v = 10 \times 2 = 20\,V$$

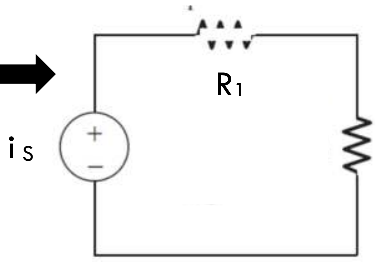


$$i_1 = \frac{20}{20} = 1A \qquad i_2 = \frac{20}{20} = 1A$$

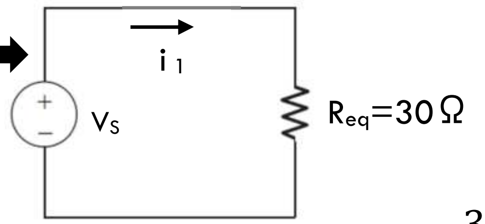
$$i_s = i_1 + i_2 \checkmark$$



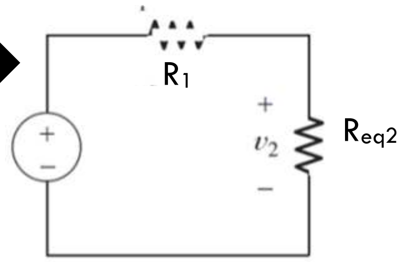




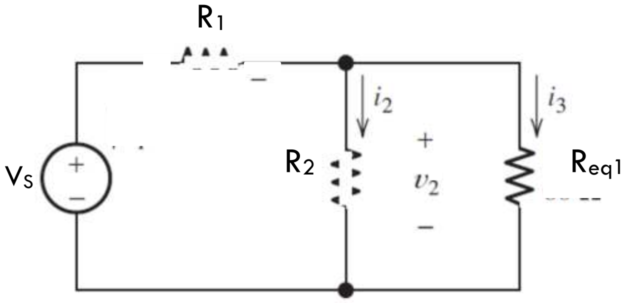
$$R_{eq2} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{40}} = 20\Omega$$



$$i_1 = \frac{30}{30} = 1A$$



$$v_2 = i_1 \times R_{eq2} = 20\ V$$



$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{20}{40} = 0.5\ A$$

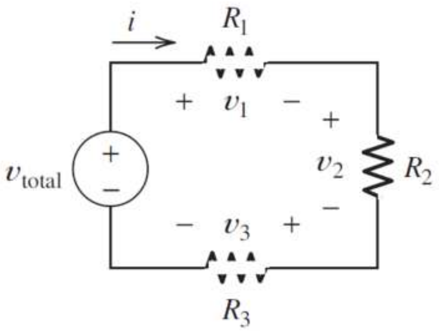
$$i_3 = \frac{v}{R_{eq1}} = \frac{20}{40} = 0.5\ A$$

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \checkmark$$

مدار های تقسیم جریان و تقسیم ولتاژ :

تقسیم ولتاژ :

اگر یک ولتاژ به مجموعه ای از مقاومت های سری اعمال شود یک کسری از ولتاژ به هر مقاومت میرسد.



بطور مثال مدار زیر را در نظر بگیرید:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow$$ مقاومت معادل مشاهده شده توسط ولتاژ

$$i = \frac{v_{total}}{R_{eq}} = \frac{v_{total}}{R_1 + R_2 + R_3} \Rightarrow$$ جریان در مقاومت ها

$$v_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} v_{total}$$

$$v_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_{2+}R_3} v_{total}$$

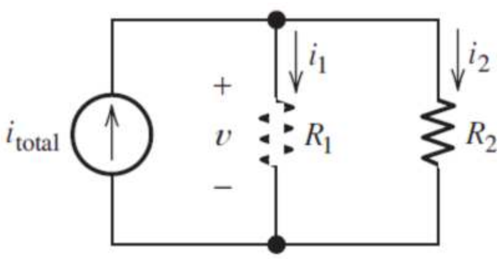
$$v_3 = R_3 i = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} v_{total}$$

$\Rightarrow$ یک ولتاژ منبع، کسری از ولتاژ که در دو سر هر مقاومت مشاهده می شود (برای یک مجموعه مقاومت سری) برابر است با نسبت مقدار مقاومت به مجموع مقاومت ها.

تقسیم جریان :

مجموع جریانی که به یک مجموع مقاومت موازی اعمال می شود، کسری از آن در هر مقاومت جریان می یابد.

بطور مثال مدار زیر را در نظر بگیرید :



$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$ مقاومت معادل

$\Rightarrow$ ولتاژ دو سر مقاومت ها

$$v = R_{eq}.i_{total} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_{total}$$

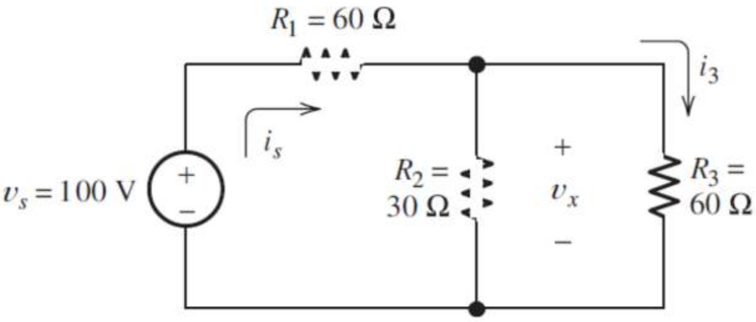
برای دو مقاومت موازی، کسری از جریان کل که در هر مقاومت جریان میابد برابر است با نسبت مقاومت دیگر به مجموع مقاومت ها. اگر تعداد مقاومت ها بیشتر از دو تا بود باید مقاومت ها را با هم ترکیب کنید که برای اعمال تقسیم جریان دو مقاومت داشته باشید.

$$\begin{cases} \boxed{i_1 = \frac{v}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_{total}} \\ \boxed{i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_{total}} \end{cases}$$

مثال :

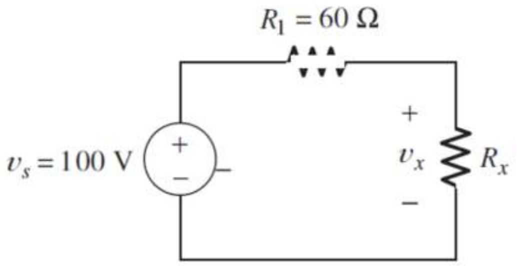
با استفاده از تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان ولتاژ $\boldsymbol{v_x}$ و جریان $\boldsymbol{i_3}$ را محاسبه کنید .

برای استفاده از قانون تقسیم ولتاژ باید مقاومت ها سری باشند بنابراین باید مقاومت معادل را برای مقاومت های موازی بیابیم.



$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20\,\Omega$$

$$v_x = \frac{R_x}{R_1 + R_x} v_s \frac{20}{60 + 20} \times 100 = 25 \text{ V}$$



$$i_s = \frac{v_s}{R_1 + R_x} = \frac{100}{60 + 20} = 1.25 \text{ A}$$

برای محاسبه i_3 از قانون تقسیم جریان استفاده می کنیم.

$$i_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_s = \frac{30}{30 + 60} \times 1.25 = 0.417 \text{ A}$$

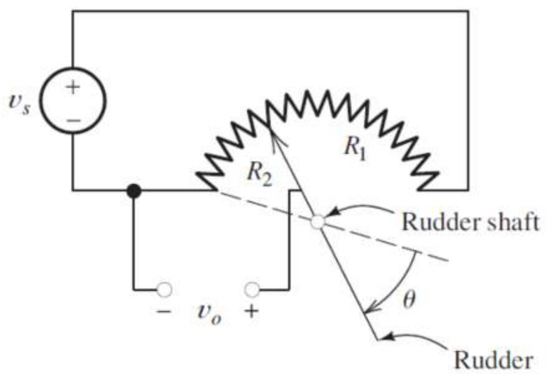
برای چک کردن می توان i_3 را به روش دیگری محاسبه کرد :

$$i_3 = \frac{v_x}{R_3} = \frac{25}{60} = 0.417 \text{ A}$$

مبدل ها بر مبنای قانون تقسیم ولتاژ: (Transducer)

مبدل ها برای تولید یک ولتاژ متناوب با یک کمیت فیزیکی مثل مسافت یا فشار یا دما به کار میروند.

بطور مثال می توان ولتاژی متناسب با زاویه عقربه موجود در یک هواپیما یا کشتی بدست آورد.



هنگامی که عقربه می چرخد یک اتصال لغزشی در امتداد مقاومت حرکت می کند.

به گونه ای که R_2 متناسب با زاویه ی عقربه θ باشد در حالی که مجموع مقاومت های $R_1 + R_2$ باشد ثابت است.

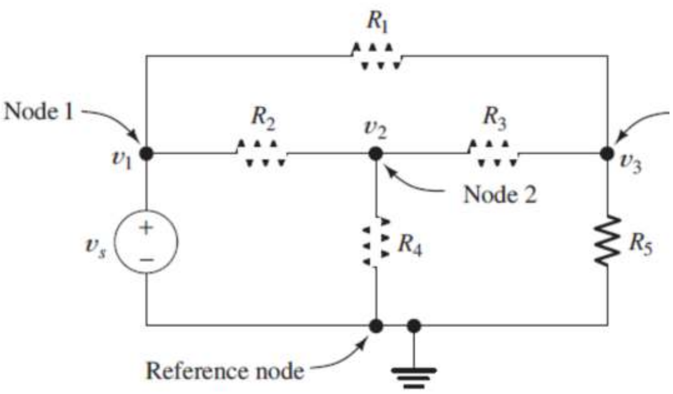
در این حالت ولتاژ خروجی برابر است با:

$$v_0 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} = K\theta$$

ضریب تناسب

آنالیز نود ولتاژ (Node Voltage Analysis) :

در برخی از شبکه ها روش های ترکیبی موازی و سری که تا کنون آموخته ایم قابل استفاده نیستند.به طور مثال در مدار شکل زیر :



در این حالت از آنالیز نود ولتاژ استفاده می کنیم که برای هر مداری قابل استفاده است.

۱. انتخاب نود مرجع :

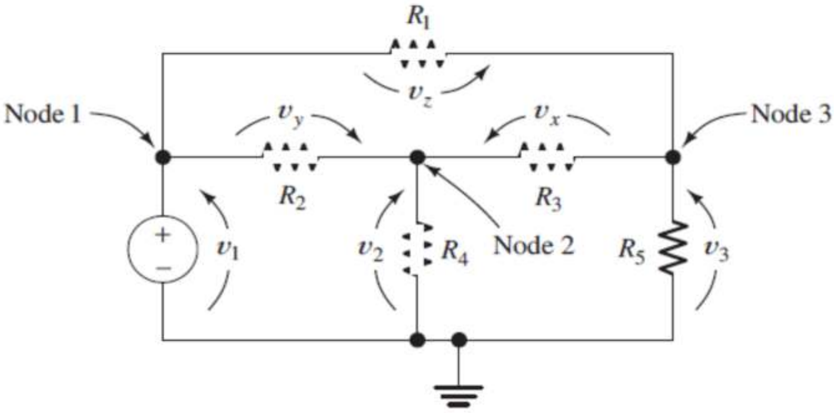
همانطور که قبلا تعریف کردیم یک نود نقطه ای است که دو یا چند المان مدار به هم متصل شده اند. برای آنالیز ولتاژ ابتدا باید یک نود را به عنوان نود مرجع در نظر میگیریم. هر نودی میتواند نود مرجع باشد ولی معمولا یکی از دو سر منبع ولتاژ نود مرجع است. به طور مثال در شکل نود مرجع با اتصال به زمین مشخص شده است.

۲. نسبت دادن یک ولتاژ به هر نود :

در قدم بعدی به هر نود یک ولتاژ نسبت می دهیم به گونه ای که قطب مثبت ولتاژ در نود مورد نظر و قطب منفی در نود مرجع است. میگوییم V_i ولتاژ نود نسبت به نود مرجع است.

۳. یافتن ولتاژ المان های الکتریکی بر اساس ولتاژ نود ها :

اگر ولتاژ نود ها مشخص شود ولتاژ المان های الکتریکی به آسانی به دست می آید. به طور مثال در مدار داده شده ولتاژ v_x ولتاژ دو سر مقاومت R_3 است. میتوان با استفاده از قانون KVL در هر حلقه رابطه بین ولتاژ المان ها را بدست آورد. به طور مثال برای حلقه شامل R_3 , R_5 , R_4 داریم :



$$\boxed{v_x = v_2 - v_3}$$

بنابراین می توان ولتاژ هر المان را بر اساس ولتاژ نود ها بدست آورد (ولتاژ مرجع صفر است).

۴. نوشتن معادلات KCL بر اساس ولتاژ نود ها :

در مرحله بعدی برای هر نود معادلات KCL را مینویسیم و برای ارتباط دادن ولتاژها از قانون اهم استفاده می کنیم. با یک مثال توضیح می دهیم :

در مدار داده شده $v_1 = v_s$ برای یافتن v_2 و v_3 ابتدا معادلات جریان را بر اساس قانون اهم و ولتاژ نود ها مینویسیم داریم جریان خروجی از R_4 برابر است با $\frac{v_2}{R_4}$ (جهت جریان از نود ۲ به نود مرجع). جریان عبوری از مقاومت R_3 برابر است با $\frac{v_2-v_3}{R_3}$ (در جهت نود ۲ به نود ۳)

➢ به طور کلی جریان عبوری از نود a به نود b با عبور از مقاومت R برابر است با $\boxed{\frac{v_a-v_b}{R}}$

بنابراین جریان عبوری از R_2 (از نود ۲ به نود ۱) برابر است با $\frac{v_2-v_2}{R_2}$

حال با استفاده از قوانین KCL داریم مجموع جریان ها در هر نود برابر است با صفر.

Node2: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

جریان های
خروجی
با علامت مثبت

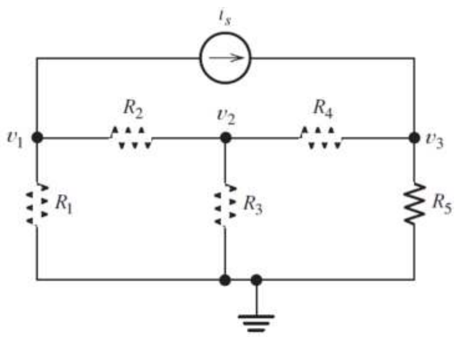
$$\frac{v_2 - v_1}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0$$

$$\boxed{v_1 = v_s}$$

Node 3: $i_5 + i_4 - i_3 = 0 \Rightarrow \frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} = 0$

مثال :

ولتاژ نود ها را بیابید.



$$i_1 + i_2 + i_s = 0$$

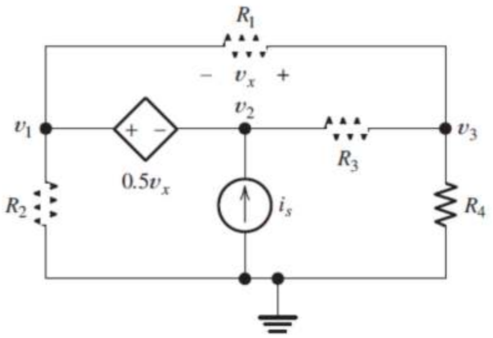
$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + i_s = 0$$

$$-i_s + i_3 + i_4 = 0 \rightarrow \frac{v_2 - v_1}{R_2} + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_3}{R_4} = 0$$

$$i_5 - i_4 - i_s = 0 \rightarrow \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_3 - v_2}{R_4} = i_s = 0$$

۳معادله و ۳ مجهول

مثال:



معادلات مستقل نود ولتاژ را برای مدار زیر بیابید.

به خاطر منبع ولتاژ بین دو نود نمی توان از معادلات جریان استفاده کرد بنابراین KVL میزنیم.

$$-v_1 + 0.5v_x + v_2 = 0$$

یک سوپر نود شامل نودهای ۱ و ۲ درنظر می گیریم. می توان دو معادله برای دو نود نوشت با در نظر گرفتن جریان i_x در منبع ولتاژ به این معادله رسید.

$$\frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = i_s$$

$\longrightarrow$ Node 3

$$(+)\quad \frac{v_3}{R_4} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3 - v_1}{R_3} = 0$$

$\longrightarrow$ Node 3

$$\frac{v_3}{R_4} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3 - v_1}{R_1} = 0$$

$$(+)$$

$$\frac{v_1}{R_2} + \frac{v_3}{R_4} = i_s$$

$$-0.5V_x = v_1 - v_2 = 0.5(v_3 - v_1)$$

$$-0.5V_x = v_1 - v_2 = 0.5(v_3 - v_1)$$

به طور خلاصه :

۱. یک نود مرجع انتخاب کنید و به نود های دیگر هر یک متغییر اختصاص دهید. اگر نود مرجع در انتهای یک منبع ولتاژ مستقل انتخاب شده است، ولتاژ یک نود در ابتدا مشخص است (ولتاژ نود سر دوم منبع).

۲. ابتدا با استفاده از KCL معادلات جریان را بنویسید (برای هم نود ها و سوپر نود ها) سپس اگر به تعداد کافی معادله بدست نیامد (به دلیل منابع ولتاژ بین نود ها) می توانید از KVL استفاده کنید.

۳. اگر مدار دارای منبع وابسته بود، عبارت مربوط به متغییر منبع وابسته را بر اساس ولتاژ نود ها بنویسید و در معادلات جایگزین کنید که فقط ولتاژ نود ها مجهول باشند.

۴. معادلات را حل کنید و مجهولات (ولتاژ نود ها) را بدست آورید.

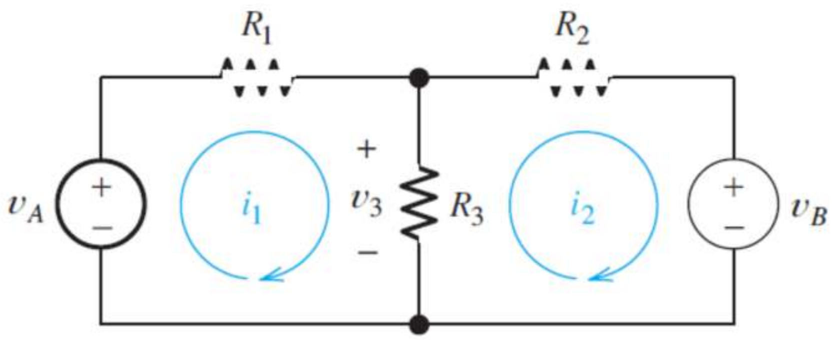
آنالیز جریان مش (Mesh_Current Analysis) :

مدار های صفحه ای:

اگر شبکه مدار بگونه ای باشد که بتوان آنرا در یک صفحه بگونه ای کشید که هیچ دو المان الکتریکی از روی هم عبور نکنند و با هم تقاطع نداشته باشند در غیر این صورت شبکه مدار را غیر صفحه ای می گوییم . برای مدار های صفحه ای از روش جریان مش استفاده می کنیم.

۱. انتخاب جریان مش :

برای هر حلقه (مش) در مدار، یک جریان در نظر میگیریم. برای سازگاری همه جریان ها را در نظر میگیریم مثلا ساعتگرد. به طور مثال در مدار روبرو دو حلقه یا مش داریم برای هر یک جریان ساعتگری در نظر میگیریم.



برای حالتی که چندین جریان مش از یک المان عبور می کنند، جریان المان برابر جمع چیزی جریان های مش عبوری از آن خواهد بود و به طور مثال در مدار مقابل جریان عبوری از R_3 برابر $(i_1 - i_2)$ میباشد (با در نظر گرفتن جهت مرجع به سمت پایین).

۲. نوشتن معادلات برای هر جریان مش:

برای هر مش در جهت جریان از قانون KVL استفاده می کنیم. توجه کنید که قانون KCL با در نظر گرفتن جریان های مش به صورت خودکار ارضا می شوند.

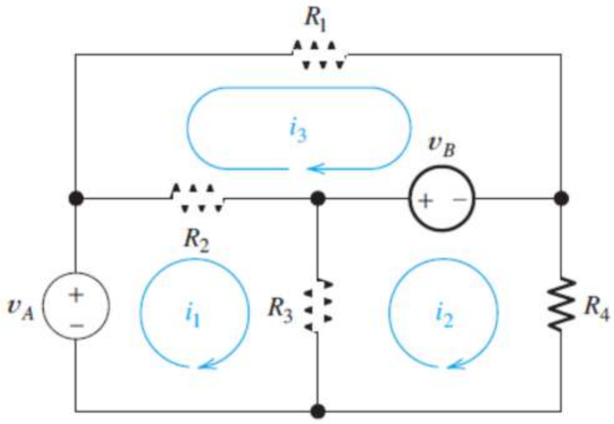
برای مدار مثال داده شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mesh 1:}\quad R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) - v_A = 0 \\ \text{Mesh 2:}\quad R_2 R_2 - R_3(i_1 - i_2) + v_B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

با حل این دو معادله مجهولات $\boldsymbol{i_1}$ و $\boldsymbol{i_2}$ بدست می آید و به منبع آن جریان عبوری از هر المان قابل محاسبه است.

اگر جریان را در شاخه وسط به سمت پایین در نظر بگیریم یعنی $(i_1 - i_2)$ با حرکت در راستای ساعتگرد در این شاخه به اندازه $R_3(i_1 - i_2)$ افت ولتاژ داریم اگر جریان را به سمت بالا در نظر بگیریم $(i_2 - i_1)$ در شاخه وسط با حرکت ساعتگرد به اندازه $-R_3(i_2 - i_1)$ افت ولتاژ داریم چون خلاف جهت جریان حرکت می کنیم.

مثال :



$$\text{Mesh1:}\ \overbrace{R_2(i_1-i_3)}^{\text{جهت مرجع به سمت راست}}+\overbrace{R_3(i_1-i_2)}^{\text{جهت مرجع به سمت پایین}}v_A=0$$

$$\text{Mesh 2:}\ R_3(i_2-i_1)+R_4\,i_2+v_B=0$$

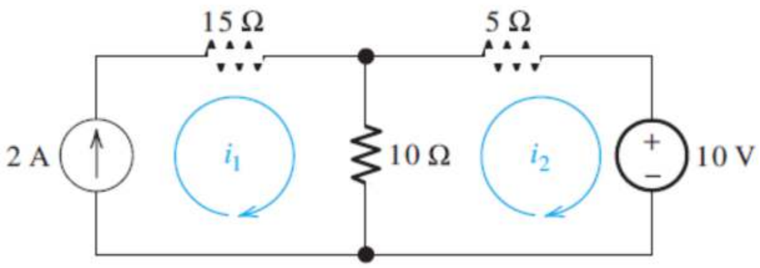
$$\text{Mesh 3:}\ R_2(i_3-i_1)+R_1\,i_3-v_B=0$$

با حل این ۳ معادله ۳ مجهول $i_1\,,i_2\,,i_3$ بدست می آید.

جریان مش در مدار های شامل منبع جریان :

توجه داشته باشید که یک منبع جریان مقدار مشخصی جریان را از ترمینال های خود اعمال می کند ولی ولتاژ دو سر آن وابسته به مدار است و (توجه کنید که ولتاژ آن صفر نیست).

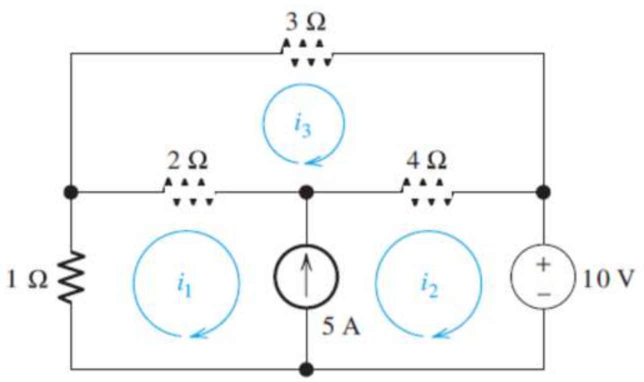
به عنوان مثال ساده مدار شکل مقابل را در نظر بگیرید :



اگر بخواهیم معادله KVL را برای مش ۱ بنویسیم مقدار ولتاژ منبع جریان مجهول است. به جای نوشتن KVL و اضافه کردن یک مجهول جدید توجه کنید که می توان نوشت $i_1=2A$ و برای مش ۲ داریم:

$$10(i_2-i_1)+5i_2+10=0$$

حالت پیچیده تری را در نظر بگیرید که مشابه شکل مقابل باشد :



از آن جا که نمی توان KVL را برای مش ۱ , ۲ جداگانه نوشت (چون شامل ولتاژ مجهول منبع جریان است) میتوان با یک سوپر مش در نظر گرفت که ترکیب مش های ۱ و ۲ باشد و در واقع KVL را حول مش ترکیبی ۱و۲ می نویسیم :

$$i_1 + 2(i_1 - i_3) + 4(i_2 - i_3) + 10 = 0$$

در واقع این معادله ترکیب در معادله KVL برای مش ۱ و ۲ است با درنظرگرفتن ولتاژ V_X برای منبع جریان و جمع کردن دو معادله می توان به این معادله رسید.

از مش ۳ داریم:

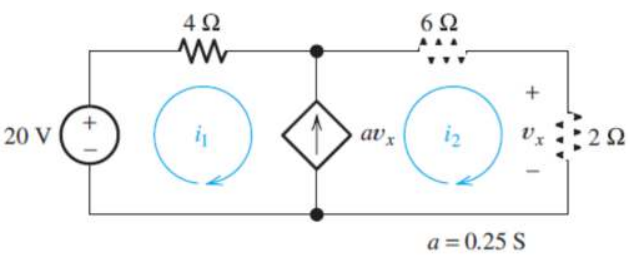
$$3i_3 + 4(i_3 - i_2) + 2(i_3 - i_1) = 0$$

از طرفی می دانیم جریان منبع $5A$ به سمت بالاست بنابراین:

$$i_2 - i_1 = 5A$$

مثال :

آنالیز مش جریان را برای مدار شکل مقابل که شامل یک جریان کنترل شده با ولتاژ می باشد بدست آورید.



Super Mesh 1,2: $\quad -20 + 4i_1 + 6i_2 + 2i_2 = 0$

از طرفی داریم:

$$av_x = 0.25v_x = i_2 - i_1 \quad , \quad v_x = 2i_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{i_2}{2} = i_2 - i_1 \\ 4i_1 + 8i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad i_1 = 1A \quad , \quad i_2 = 2A$$

به طور خلاصه :

۱- مدار را طوری بکشید که شامل هادی ها و المان های متقاطع نباشند. هر حلقه را یک مش با جریان خاص در نظر بگیرید. برای سازگاری جهت مشخصی برای جریان ها فرض کنید مثلا ساعتگرد.

۲- ابتدا KVL را برای مش هایی که شامل منبع جریان نیستند بنویسید. اگر منبع جریان داریم آنرا بر اساس جریان های مش ها می نویسیم. در صورتی که منبع جریان بین دو مش مشترک است معادله KVL را برای سوپرمش بنویسید.
۳- اگر مدار شامل منبع وابسته است عبارت مربوط به متغیر منبع وابسته را بر اساس جریان مش ها بنویسید و معادلات جایگزین کنید که فقط جریان مش ها مجهول معادلات باشد.
۴- معادلات را حل کنید و مجهولات (جریان مش ها) را بدست آورید.

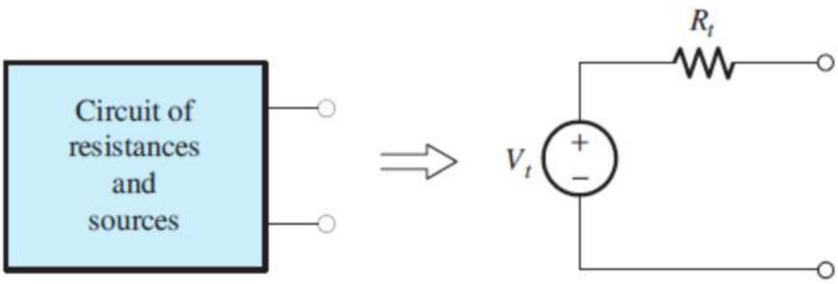
مبانی مهندسی ۱ – جلسه چهارم

معادله تونن و نورتن (Thevenin and Norton Equivalent) :

در این بخش هدف جایگزینی یک مدار دارای دو ترمینال (شامل مقاومت ها و منابع) با مدار های معادل ساده تر است. منظور از مدار های دو ترمینال این است مدار تنها دارای دو نقطه است که قابل اتصال به مدار های دیگر هستند.

معادل تونن :

این مدار معادل شامل یک منبع مستقل و یک مقاومت سری است (مطابق شکل) در حالت مدار باز جریانی از دو ترمینال عبور نمی کند و جریان عبوری از مقاومت و نتیجه ولتاژ دو سر آن صفر است بنابراین با KVL داریم :



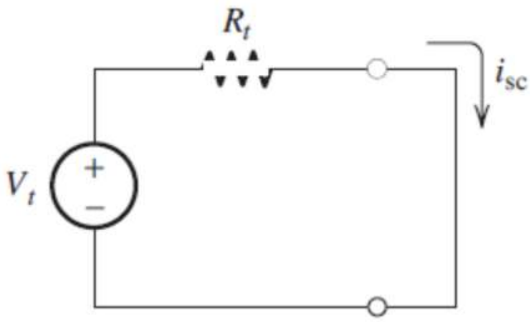
$V_t = v_{oc}$
Open Circuit

بنابراین ولتاژ معادل تونن برابر است با ولتاژ مدار باز اصلی.

جای معادل تونن را با یک اتصال کوتاه در نظر بگیرید. جریان عبوری می بایست با جریان عبوری از اتصال کوتاه مدار اصلی برابر باشد بنابراین داریم :

$$i_{sc} = \frac{V_t}{R_t} \quad \Longrightarrow \quad R_t = \frac{V_t}{i_{sc}} = \boxed{R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}}$$

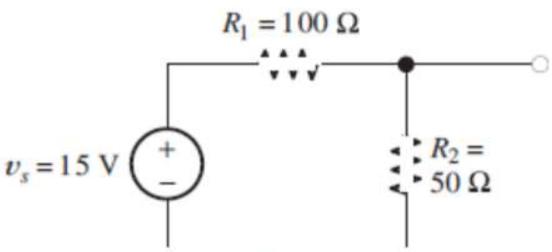
Short Circuit

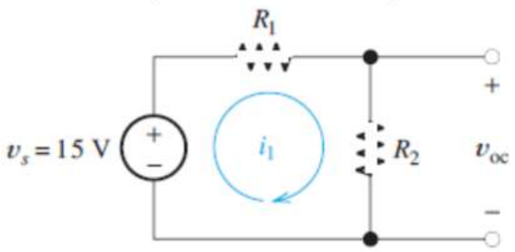


بنابراین برای یافتن مدار معادل تونن، مقدار ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه مدار اصلی و مدار معادل باید برابر باشد و می توان به این ترتیب مدار تونن را جایگزین مدار اصلی کرد.

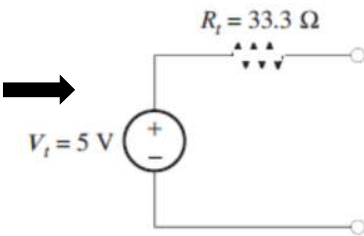
مثال :

معادل تونن مدار مقابل را بیابید :





$$\left.\begin{aligned} v_{oc} &= R_2 i_1 = 50 \times 0.10 = 5V \\ i_{sc} &= \frac{v_s}{R_1} = \frac{15}{100} = 0.15A \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

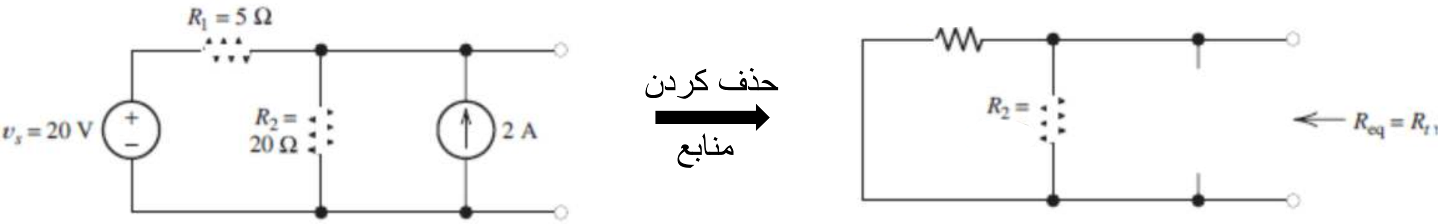


(d) Thévenin equivalent

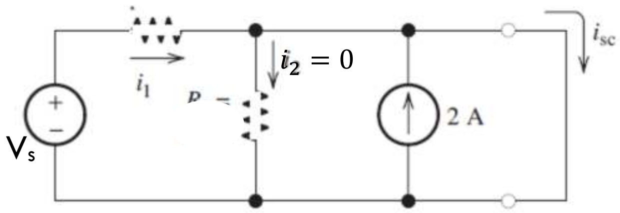
راه مستقیم یافتن مقاومت معادل تونن :

اگر مدار شامل هیچ منبع وابسته ای نباشد می توان مقاومت معادل تونن را مستقیما به دست آورد. ابتدا تمام منابع را صفر می کنیم. به این ترتیب که اگر منبع ولتاژ را صفر کنیم می توان آن را با یک اتصال کوتاه معادل کرد. اگر منبع جریان را صفر کنیم می توان ان را با یک مدار باز معادل کرد. سپس مقاومت معادل مدار را از دید ترمینال ها حساب کنید این مقاومت معادل تونن است.

مثال :

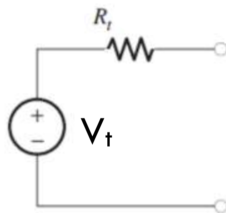


$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = 4\,\Omega$$



$$i_1 = \frac{v_s}{R_1} = \frac{20}{5} = 4\ A$$

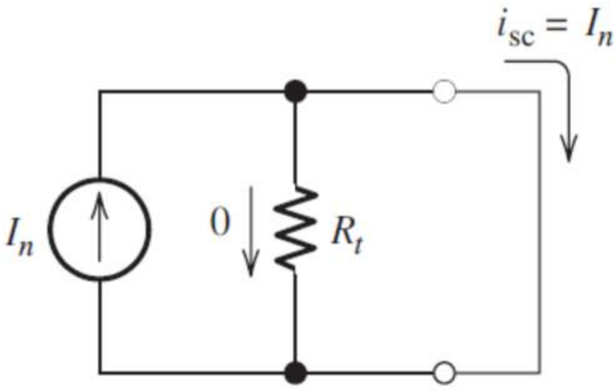
$$i_1 + 2 = i_2 \underset{0}{+} \cancel{i_{sc}} \quad \Longrightarrow \quad i_{sc} = 6\ A$$



$$V_t = R_t i_{sc} = 4 \times 6 = 24\ \text{V}$$

معادل نورتن:

هدف جایگزینی یک مدار با یک مدار ساده شامل یک منبع جریان مستقل I_n به موازات یک مقاومت است. ثابت می شود این مقاومت همان مقاومت معادل تونن است. برای محاسبه جریان معادل نورتن کافی است مدار اتصال کوتاه کنیم.



در این حالت جریان عبوری از R_t صفر است و داریم :

$$I_n = i_{sc}$$

بنابراین جریان معادل نورتن برابر است با جریان اتصال کوتاه دو سر ترمینال مدار اصلی.

به طور خلاصه برای یافتن معادل نورتن / تونن :

۱. الف) مقدار ولتاژ مدار باز را تعیین کنید $v_t = v_{oc}$ یا مقدار جریان اتصال کوتاه را تعیین کنید $I_n = i_{sc}$

ب)مقادیر منابع مستقل را صفر کنید و مقاومت معادل تونن R_t را از دید دو سر ترمینال بیابید. منابع وابسته را صفر نکنید.

۲. از رابطه $V_t = R_t I_n$ استفاده کنید.

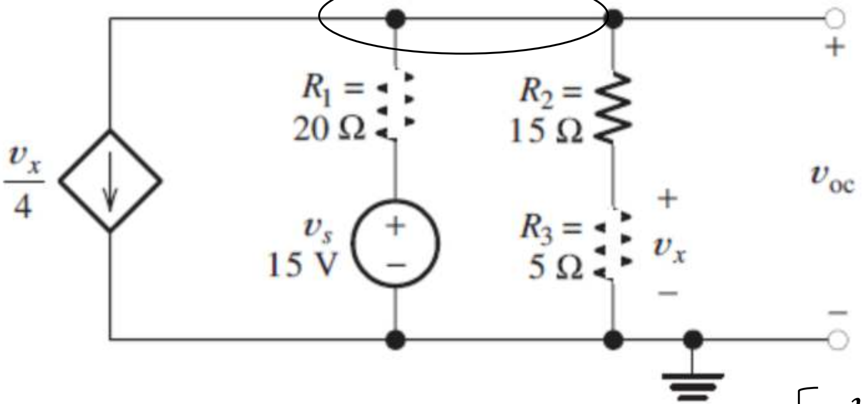
۳. معادل تونن عبارت است از یک منبع ولتاژ V_t سری با مقاومت R_t

۴. معادل نورتن عبارت است از منبع جریان I_n موازی با مقاومت R_t

مثال :

معادل نورتن را بیابید :

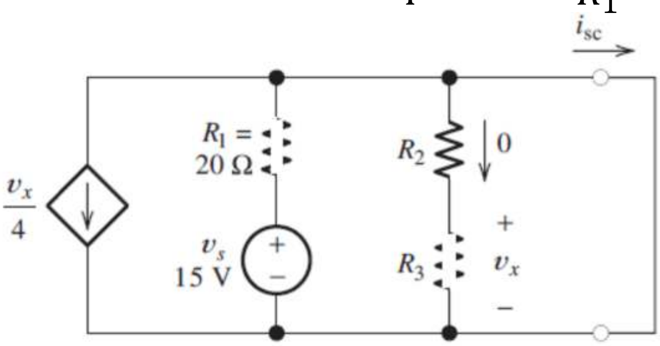
V_{oc} را به عنوان یک نود ولتاژ فرض می کنیم و معادله جریان را برای نود بالایی می نویسیم .



$$\begin{cases} \dfrac{v_x}{4} + \dfrac{v_{oc} - 15}{R_1} + \dfrac{v_{oc}}{R_2 + R_3} = 0 \\ v_x = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} v_{oc} = 0.25 v_{oc} \end{cases}$$

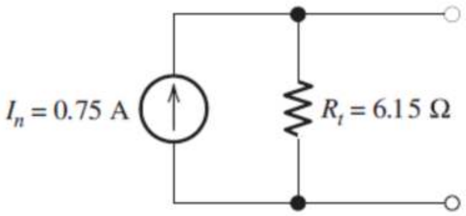
از قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$\frac{0.25v_{oc}}{4} + \frac{v_{oc} - 15}{R_1} + \frac{v_{oc}}{R_2 + R_3} = 0 \qquad v_{oc} = 4.62 \text{ V}$$



$$V_x = 0 \implies i_{sc} = \frac{v_s}{R_1} = \frac{15\ V}{20\ \Omega} = 0.75\ A$$

$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{4.62}{0.75} = 6.15\ \Omega$$



اصل بر هم نهی (Superposition Principle):

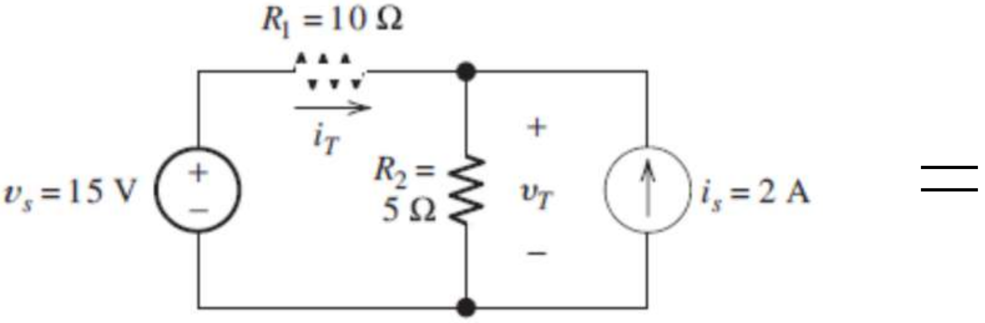
اگر یک مدار شامل مقاومت ها، منابع وابسته و منابع مستقل باشد می توان از اصل برهم نهی برای بدست آوردن ولتاژ یا جریان در یک المان استفاده کرد. به این ترتیب که همه منابع به جز یکی را صفر می کنیم و مقدار ولتاژ یا جریان حاصله در المان مورد نظر را می یابیم. سپس منبع دوم را غیر صفر و بقیه را صفر می کنیم و دوباره مقدارولتاژ v_2 یا جریان i_2 حاصله را در المان مورد نظر را می یابیم و همین طور برای تک تک منابع مستقل ادامه می دهیم. جریان i و یا ولتاژ v کل در المان مورد نظر برابر است با :

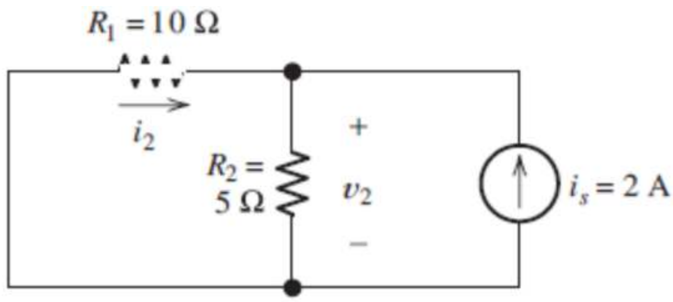
$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots \\ v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \end{cases}$$

- توجه کنید که نمیتوان توان المان را از این طریق محاسبه کرد چون روابط آن غیر خطی است.

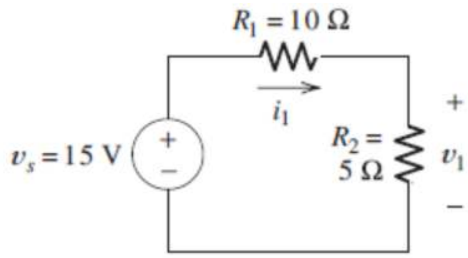
$$\boxed{P = \frac{v^2}{R} \quad P = Ri^2}$$

مثال :





$+$



$$v_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s = \frac{5}{5+10}(15) = 5\ V \qquad v_2 = i_s R_{eq} = i_s \times \frac{1}{{}^1/_{R_1} + {}^1/_{R_2}} = 2 \times 3.33 = 6.66\ \mathrm{V}$$

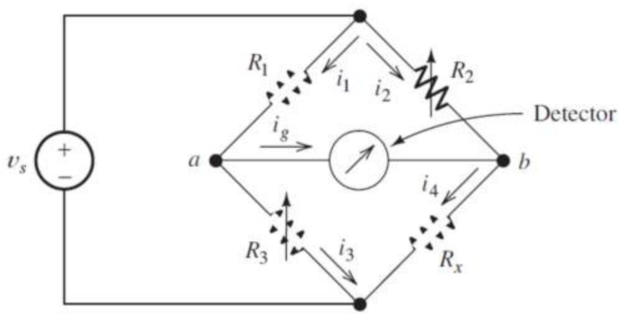
$$v_T = v_1 + v_2 = 5 + 6,66 = 11.66$$

$$i_1 = 1A \quad , \quad i_2 = -0.667A \quad \longrightarrow \quad i_T = 0.333A$$

: (Wheatstone Bndge) پل وتستون

پل وتستون مداری است که برای اندازه گیری مقاومت های مجهول بکار می رود. به طور مثال توسط مهندسان مکانیک و عمران برای اندازه گیری مقاومت کشش سنج های آزمایشگاهی بکار می رود. مدار به شکل مقابل است. مقاومت های متغییر R_2 , R_3 را طوری تنظیم می کنند که جریان آشکار ساز صفر شود یعنی

$i_g = 0$ و $v_{ab} = 0$ در این حالت گوییم مدار متقارن است.



$$\left.\begin{array}{l} R_1 i_1 + v_{ab} = R_2 i_2 \\ R_3 i_3 - v_{ab} = R_x i_4 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} R_1 i_1 = R_2 i_2 \\ R_3 i_3 = R_x i_4 \end{array}\right.$$

از طرفی داریم $i_g = 0$ $\longleftarrow$ $i_1 = i_3$, $i_2 = i_4$ بنابراین:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \longrightarrow R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3$$

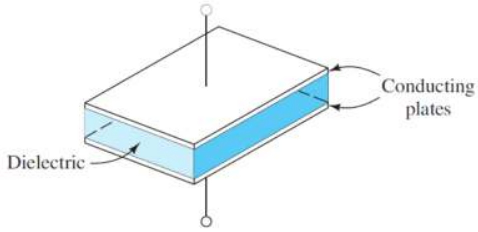
مبانی برق ۱ – جلسه ۵

فصل دوم

خازن و القاگر(Capacitance and Inductance)

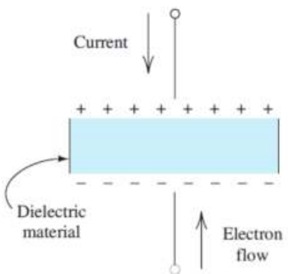
خازن :

خازن ها از دو ورق هادی جدا شده با یک لایه دی الکتریک dieleccteric (غیر هادی) تشکیل شده اند .



در یک خازن جریان الکترون ها(پس از برقراری جریان در مدار) در یک طرف صفحه خازن به مرور جمع می شوند.

و یک میدان الکتریکی در دی الکتریک بوجود می آورند که به مرور زمان افزایش می یابد و این میدان االکتریکی، الکترون ها را ز صفحه دیگر خازن می راند

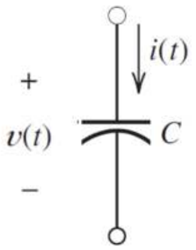


به این ترتیب می توان گفت جریان در خازن ایجاد می شود و به مرور زمان که بار الکتریکی بیشتری در خازن انباشته می شود، ولتاژ در خازن ایجاد شده و افزایش می یابد. در یک خازن ایده آل، بار ذخیره شده در خازن رابطه خطی با ولتاژ دو سر خازن دارد.

$$q = CV$$

که در این رابطه C ظرفیت خازن نام دارد و با واحد فاراد (F) که معادل $\frac{C}{V}$ $\frac{\text{کولمب}}{\text{ولت}}$ است. توجه شود که $1F$ ظرفیت بزرگی است و معمولا خازن دارای ظرفیت $10^{-12}F = 1pF$ تا $0.01F$ هستند .

رابطه جریان در یک خازن به شکل زیر است:

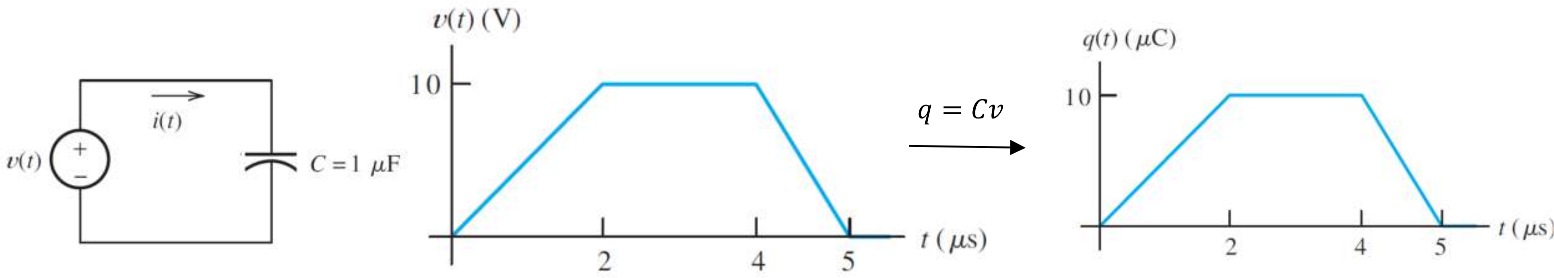


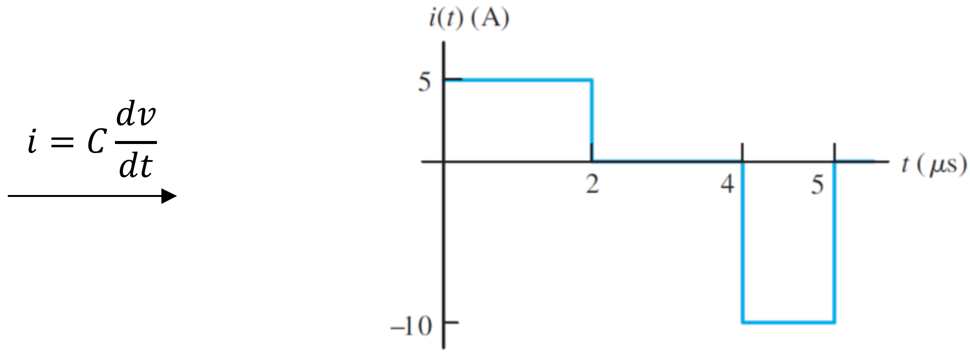
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cv) = C\frac{dv}{dt}$$

این رابطه نشان می دهد اگر ولتاژافزایش یابد جریان در خازن ایجاد می شود و بار الکتریکی در صفحات خازن ذخیره می شود. اگر ولتاز ثابت بماند جریان صفر خواهد بود.

مثال :

فرض کنید ولتاژ در مدار زیر به یک خازن با ظرفیت $100\ F$ اعمال می شود. جریان خازن را بیابید:





$$0 < t < 2\ \mu s:\quad i = C\frac{dv}{dt} = 10^{-6} \times \frac{10\ V}{2 \times 10^{-6}\ s} = 5A \qquad 2 < t < 4\ \mu s:\quad i = C\frac{dv}{dt} = C \times 0 = 0A$$

$$4 < t < 5\ \mu s \quad i = C\frac{dv}{dt} = 10^{-6} \times -\frac{10\ V}{10^{-6}s} = -10\ A$$

رابطه ولتاژ بر حسب جریان :

فرض کنید جریان i از یک خازن عبور می کند (با ظرفیت c). فرض کنید در زمان t_0 (ابتدای برقراری جریان) مقدار $q(t_0)$ بار در خازن ذخیره شده است در این حالت بار الکتریکی بر حسب تابعی از زمان برابر است با:

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} i(t)dt + q(t_0)$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\ dt + \frac{q(t_0)}{C} = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\ dt + v(t_0)$$

مثال :

مدار زمان $t_0 = 0$ جریان عبوری از یک خازن $0.1\,\mu f$ به شکل زیر داده شده است :

$$i(t) = 0.5 \sin(10^4 t)$$

داریم $q(t_0)=0$ ، $q(t)$ و $v(t)$ را برحسب زمان بدست بیاورید.

$$q(t) = \int_0^t i(t)\,dt + q(0) = \int_0^t 0.5 \sin(10^4\, t) dt = -0.5 \times 10^{-4} \cos(10^4 t) \Big|_0^t = 0.5 \times 10^{-4}[1 - \cos(10^4 t)]$$

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q(t)}{10^{-7}} = 500[1 - \cos(10^4 t)]$$

انرژی ذخیره شده:

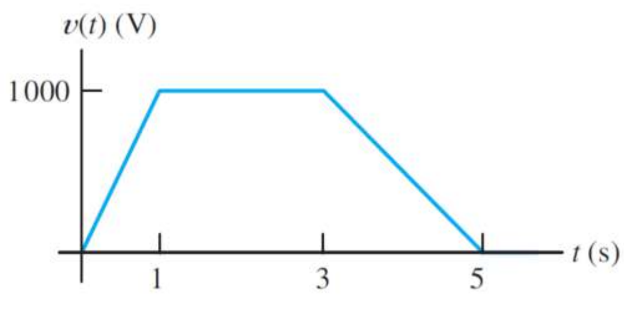
توان انتقالی که یک المان الکتریکی برابر است با $p(t)=v(t)\ i(t)$ برای یک خازن داریم :

$$p(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow[\text{انرژی ذخیره شده}]{} w(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)dt = \int_{t_0}^{t} Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}dt = \int_0^{v(t)} Cv(t)dv(t)$$

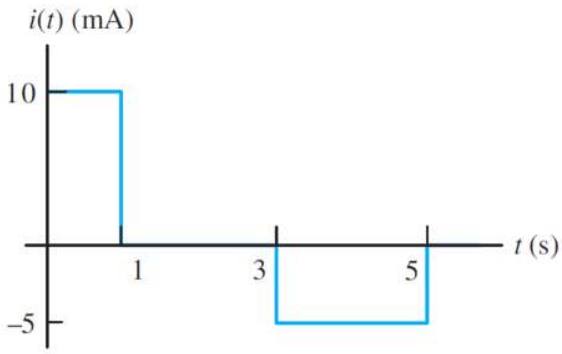
$$\Rightarrow \boxed{w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) = \frac{1}{2}v(t)q(t) = \frac{q^2(t)}{2C}}$$

مثال :

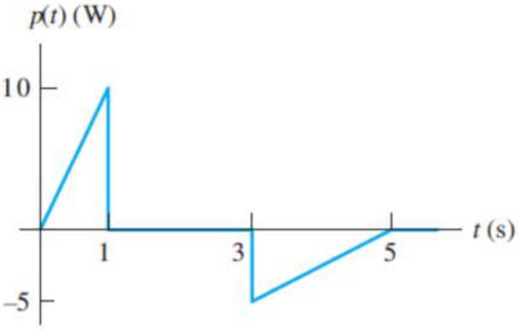
ولتاژ اعمال شده به یک خازن $10\ \mu f$ در زیر آورده شده است. جریان، توان انتقالی و انرژی ذخیره شده بین زمان های ۰ تا ۵ ثانیه را بیابید.

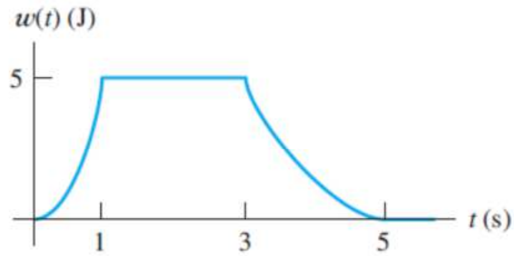


$$v(t) = \begin{cases} 1000t\ V & 0 < t < 1\ s \\ 1000\ V & 1\ s < t < 3\ s \\ 500(5-t)V & 3\ s < t < 5\ s \end{cases} \xrightarrow{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}} i(t) = \begin{cases} 10 \times 10^{3} A & 0 < t < 1\ s \\ 0\ A & 1\ s < t < 3\ s \\ -5 \times 10^{-3} A & 3\ s < t < 5s \end{cases}$$



$$p(t)=v(t)i(t) \qquad p(t)=\begin{cases}10\,t\ W & 0<t<1\ s\\ 0\ W & 1\ s<t<3\ s\\ 2.5(t-5)\ W & 3\ s<t<5\ s\end{cases} \qquad w(t)=\int_0^5 p(t)dt$$

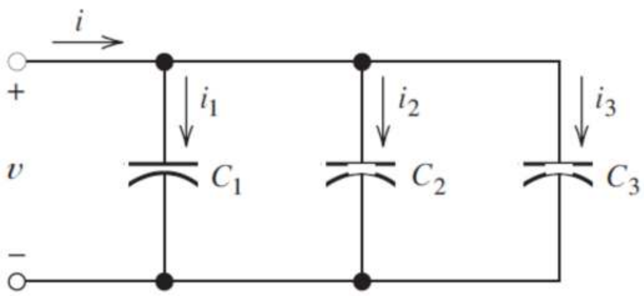




$$w(t)=\begin{cases}5t^2\mathrm{J} & 0<t<1\ s\\ 5\ \mathrm{J} & 1\ s<t<3\ s\\ 1.25(5-t)^2\mathrm{J} & 3\ s<t<5\ s\end{cases}$$

خازن های سری و موازی :

فرض کنید یه خازن به صورت موازی داریم :



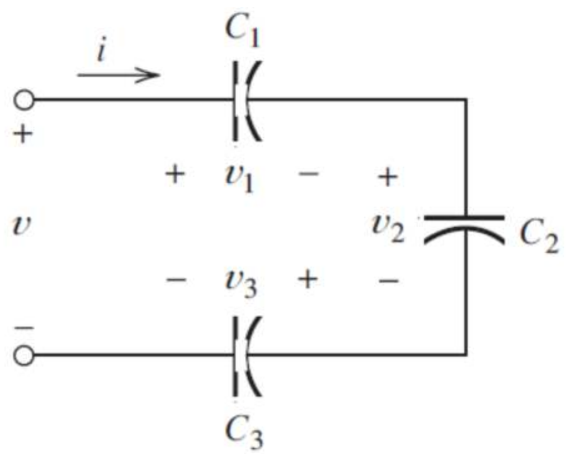
$$\begin{cases}i_1=C_1\,{dv}/{dt}\\ i_2=C_2\,{dv}/{dt}\\ i_3=C_3\,{dv}/{dt}\end{cases}$$

$$i=i_1+i_2+i_3$$

$$\Rightarrow i=C_1\frac{dv}{dt}+C_2\frac{dv}{dt}+C_2\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow i = (C_1 + C_2 + C_3)\frac{dv}{dt} = C_{eq}\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3}$$

فرض کنید خازن ها به صورت سری باشند داریم :



$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$$

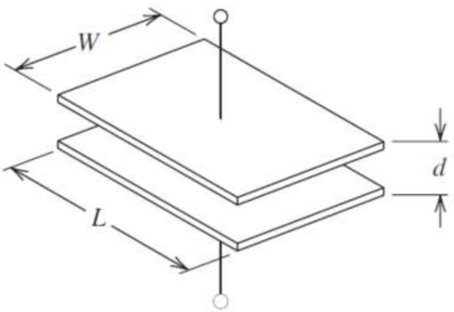
$$\begin{cases} v_1(t) = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(t)dt \\ v_2(t) = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(t)dt \\ v_3(t) = \dfrac{1}{C_3}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(t)dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + \frac{1}{C_3}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

خواص فیزیکی خازن ها :

در یک خازن معمولی هر یک از صفحات هادی دارای سطح A می باشد $A = W \times L$. صفحات با هم موازی هستند و به فاصله d از هم قرار دارند. اگر فاصله d بسیار کمتر از طول و عرض صفحات باشد رابطه ظرفیت خازن را به شکل زیر داریم :

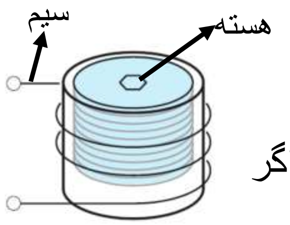


$$\boxed{C = \frac{\epsilon A}{d}}$$

که ϵ ضریب دی الکتریک ماده بین دو صفحه است و برابر است با $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ثابت دی الکتریک برای خلأ می باشد

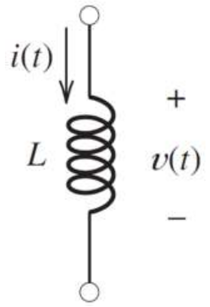
$\epsilon_0 \cong 8.85 \times 10^{-12}\, F/m$

برای مثال ضریب دی الکتریک (ϵ_r) برای الماس ۵/۵ ، برای پولیستر ۳/۴ و برای کواتز ۴/۳ است (برای هوا همان ضریب دی الکتریک خلا در نظر گرفته می شود).



القاگر :

القاگر (inductor) معمولا با پیچیدن یک سیم حول یک هادی بدست می آید. جریان عبوری از سیم پیچ یک میدان مغناطیسی ایجاد می کند که در داخل هسته تقویت می شود. اگر جریان عبوری از سیم پیچ تغییر کند، میدان مغناطیسی حاصله تغییر میکند و طبق قانون فارادی در سیم پیچ ولتاژ القا می کند. برای یک القاگر ایده آل ولتاژ حاصله متناسب با تغییر زمانی جریان است و ضریب این رابطه نسبی به ضریب القایی شناخته می شود و با L نمایش داده می شود . برای القاگر ایده آل داریم :



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

اگر بخواهیم جریان را بر حسب ولتاژ دو سر القاگر بنویسیم داریم :

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\, dt + i(t_0)$$

انرژی ذخیره شده، همانطور که گفتیم برای توان انتقالی یک المان مدار داریم :

$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$p(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

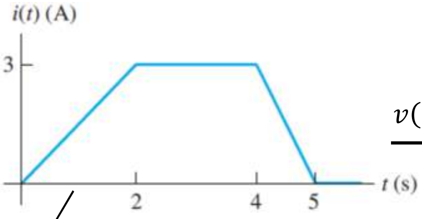
داریم انرژی ذخیره شده در یک المان الکتریکی از رابطه $w(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)dt$ پیروی می کند برای القاگر داریم:

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} Li(t)\frac{di(t)}{dt}dt = \int_{0}^{i(t)} Lidi \;\; = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

واحد ضریب القاگر هادی H است که معادل $\frac{\text{ثانیه ولت}}{\text{آمپر}}$ $\frac{V.S}{A}$ است. مقدار ضریب القایی از μH تا چند H متغییر است .

مثال :

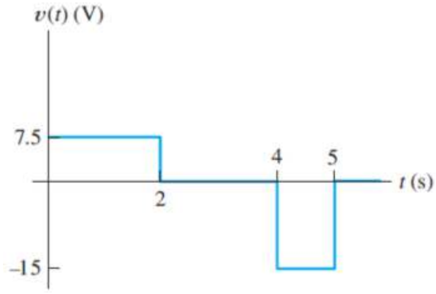
جریان عبوری از یک القاگر با ظرفیت ۵H در شکل نشان داده شده است. ولتاژ، توان و انرژی ذخیره شده را بر حسب زمان بیابید.



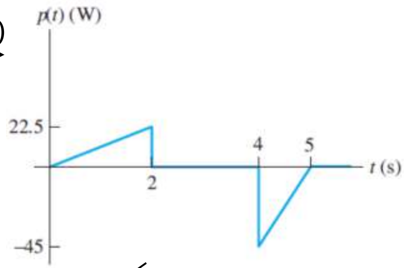
$$\begin{cases} 3/2\, t \\ 3 \\ t3(5-t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{v(t) = L\, {}^{di}\!/_{dt}}$$

$$\begin{cases} {}^{di}\!/_{dt} = 1.5\, A/s & 0 < t < 2 \\ {}^{di}\!/_{dt} = 0 & 2 < t < 4 \\ {}^{di}\!/_{dt} = -3\ A/s & 4 < t < 5 \end{cases}$$

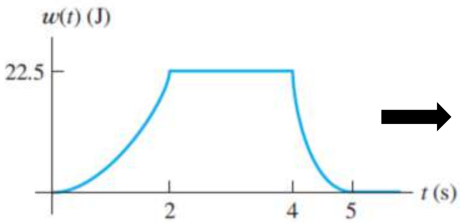


$$\xrightarrow{p(t) = v(t)i(t)}$$



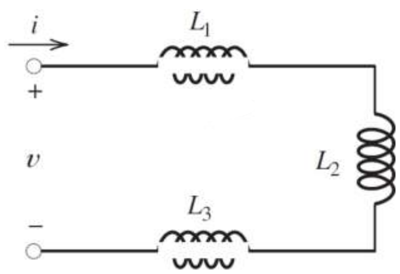
$$p(t) = \begin{cases} {}^{45}\!/_{4}\, t \\ 45(t-5) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)}$$



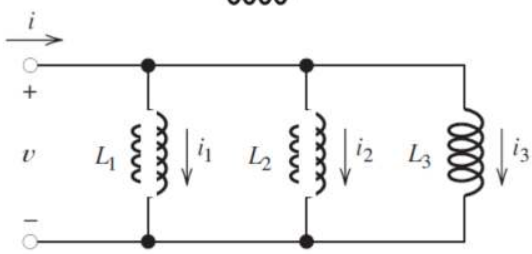
$$\begin{cases} {}^{45}\!/_{8}\, t^2 \\ 21.5 \\ {}^{45}\!/_{2}\, (5-t)^2 \end{cases}$$

القاگر های سری و موازی :



$$v(t) = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3}$$ سری

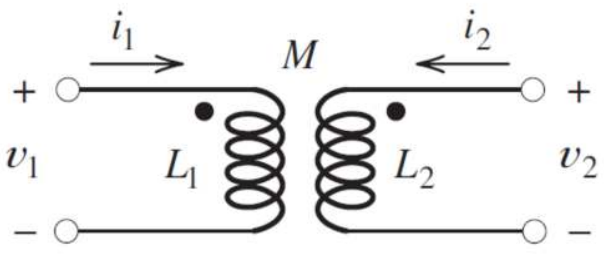


$$i(t) = \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^{t} v(t)dt + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^{t} v(t)dt + \frac{1}{L_3} \int_{t_0}^{t} v(t)dt = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}}$$ موازی

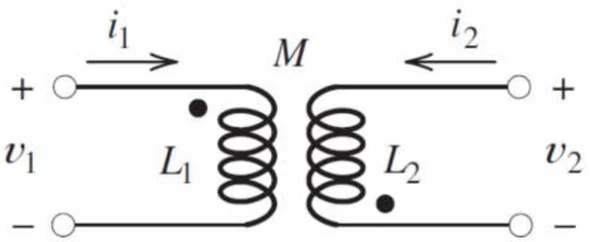
القای متقابل (Mutual Inductance) :

درصورتی که چندین سیم پیچ حول یک هسته آهنی مشترک قرار داشته باشند و جریان شار مغناطیسی ایجاد شده توسط یک سیم پیچ دور سیم پیچ های دیگر ولتاژ القایی ایجاد می کند که به القای متقابل معروف است. ضریب القای متقابل با M نشان داده می شود.



هم جهت

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$



مختلف الجهت

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = -M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

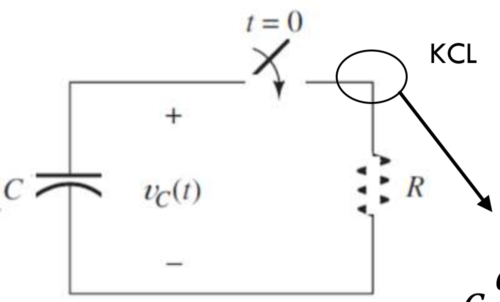
توجه کنید که شار مغناطیسی القا شده توسط سیم پیچ دوم می تواند در جهت یا در خلاف جهت شار مغناطیسی سیم پیچ اول باشد. نقاط توپر نشان داده شده روی نماد سیم پیچ نشان می دهد که آیا شار های مغناطیسی هم جهت یا مختلف الجهت هستند.

جلسه ششم – مبانی برق ۱

فصل ۴ _ پاسخ گذرا (Transients)

مدار های RC:

تخلیه الکتریکی خازن با یک مقاومت :



$$i = \frac{Cdv_C}{dt} = -\frac{v_C}{R}$$

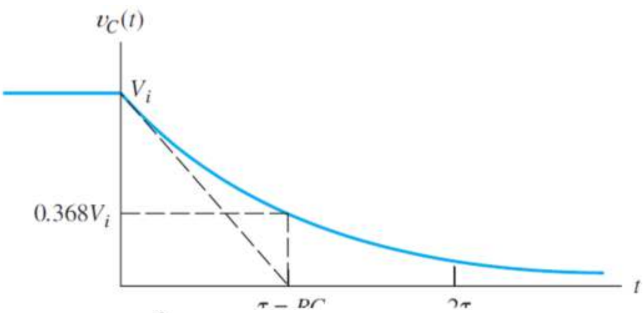
$$C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = 0 \Rightarrow RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C = 0$$

حل معادله دیفرانسیل $\Rightarrow$ $v_C(t) = Ke^{st}$ $\Rightarrow$ جایگذاری در معادله $RCKse^{st} + Ke^{st} = 0$

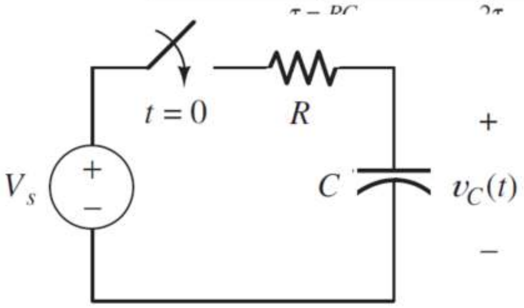
$$\Rightarrow s = \frac{-1}{RC} \Rightarrow v_C(t) = Ke^{-t/RC} \xrightarrow{v_C(0) = V_i} K = V_i \quad , \quad v_C(t) = V_i e^{-t/RC}$$

به مقدار $\tau = RC$ ثابت زمانی گفته می شود پس از یک ثابت زمانی ولتاژ به $\frac{1}{e} = 0.368$ افت می کند.

بعد از ۵ ثابت زمانی، ولتاژ باقی مانده در خازن بسیار ناچیز است.



فشار یک خازن از یک منبع DC و یک مقاومت :



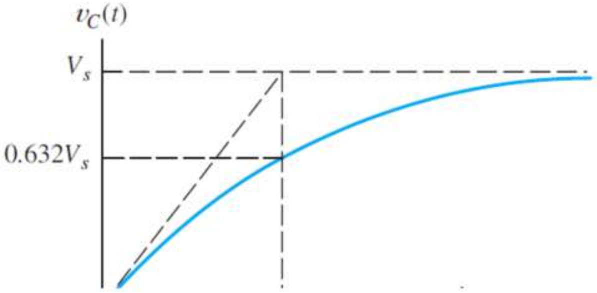
$$i = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{V_s - v_C}{R}$$

$$\frac{Cdv_C}{dt} + \frac{v_C - V_s}{R} = 0 \Rightarrow RC\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = V_s$$

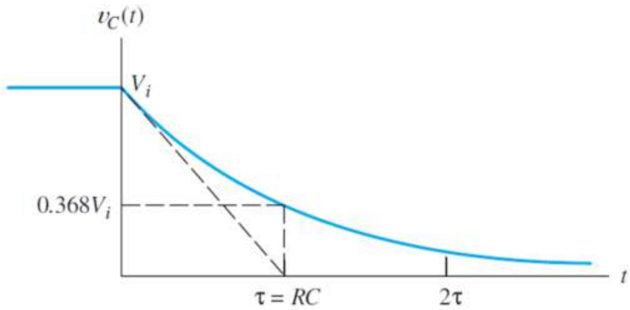
معادله دیفرانسیل $\Rightarrow v_C(t) = K_1 + K_2 e^{st} \Rightarrow$ جایگذاری در معادله $(1 + RC_s)K_2 e^{st} + K_1 = V_s$

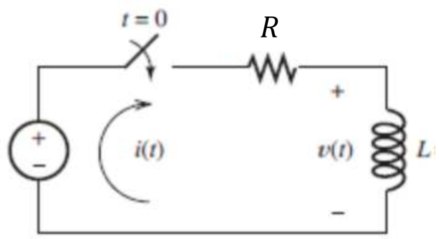
$$s = \frac{-1}{RC} \quad , \quad K_1 = V_s \xrightarrow{V(L) = 0} K_2 = -V_s \quad , \quad v_C(t) = V_s - V_s e^{-t/RC}$$

جمله دوم پاسخ گذرا است که با گذشت زمان به صفر می رسد. جمله اول پاسخ پایدار است که به نام پاسخ اجباری هم شناخته می شود. ثابت زمانی $\tau = RC$ است. بعد از یک ثانیه زمانی $v_C(t)$ به 0.632 v می رسد (یا فاصله از V_s برابر است با $0.368V_s$) ۵ ثابت زمانی مقدار V_c تقریبا به V_s می رسد (مقدار به ۹۹٪ نزدیک می شود).



حالت پایدار (Steady-state) که پاسخ گذرای مدار صفر می شود مقدار ولتاژ خازن است با V_s جریان خازن صفر است.





مدارهای RL:

V_s $\xrightarrow{KVL}$ $$Ri(t) + L\frac{di}{dt} = V_s$$

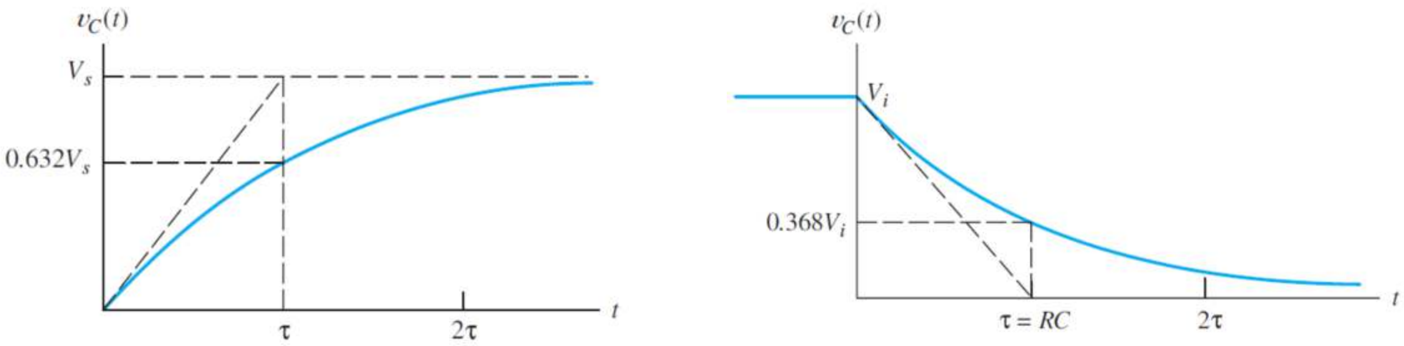
حل معادله دیفرانسیل: $i(t) = K_1 + K_2e^{st}$ ➡ جایگذاری در معادله: $RK_1 + (RK_2 + sLK_2)e^{st} = V_s$

$$K_1 = \frac{V_s}{R} \quad , \quad s = -\frac{R}{L} \Longrightarrow i(t) = \frac{V_s}{R} + K_2e^{\frac{-Rt}{L}}$$

$$\xrightarrow{i_L(0) = 0} K_2 = -\frac{V_s}{R} \quad , \quad i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{\frac{-Rt}{L}}$$

قبل از بسته شدن کلید جریان در القاگر صفر است

در این حالت ثابت زمانی برابر $\tau = \frac{L}{R}$



در لحظه t=0 ولتاژ در سر القاگر به V_s افزایش می یابد به مرور زمان و با افزایش جریان ولتاژ دو سر القاگر افت می کند در حالت پایدار (steady _ state) و پس از صفر شدن پاسخ گذرای مدار ولتاژ دو سر القاگر صفر است و جریان القاگر برابر است با $\frac{V_S}{R}$

حالت پایدار DC (DC steady state):

پاسخ گذرای مدارهای RC , RL با گذشت زمان از بین می رود و تنها پاسخ پایدار (steady state) باقی می ماند (تنها استثنا مدارهای LC هستند که مقاومتی ندارند). در حالی که منابع مدار dc هستند ، جریان و ولتاژ پایدار هم ثابت هستند .

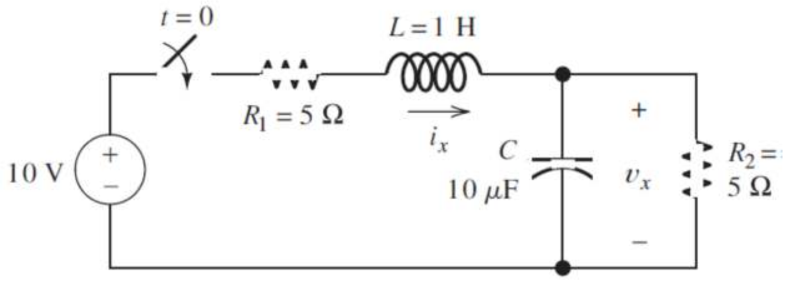
برای یک خازن داریم: $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$ بنابراین اگر ولتاژ ثابت باشد (DC) در این حالت جریان صفر خواهد بود به عبارت دیگر برای حالت پایداربا منابع DC خازن ها مثل یک مدار باز عمل می کند.

به طور مشابه برای القاگر داریم $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ بنابراین برای جریان ثابت، ولتاژ صفر است. به عبارت دیگر برای شایط پایداربا منابع DC داریم القاگرها مثل اتصال کوتاه عمل می کنند.

برا اساس این مشاهدات برای یافتن پاسخ پایدار در مدارهای RLC با منابع ثابت (DC) ابتدا خازن ها را با مدار باز و القا گرها را با اتصال کوتاه جایگزین می کنیم. مدار حاصله تنها شامل منابع DC و مقاومت خواهد بود و مدار حاصله را برای جریان و ولتاژ پایدار حل می کنیم.

مثال :

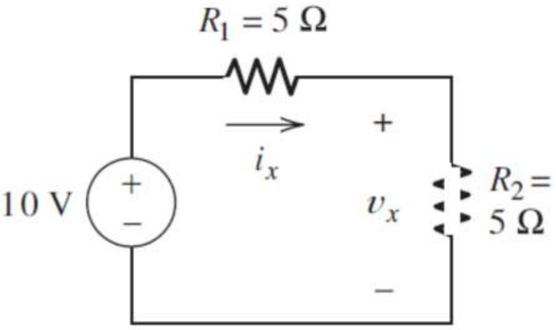
برای $t \gg 0$ **مقدار** v_x , i_x را در مدار زیر بیابید .



بعد از بسته شدن کلید بعد از زمان طولانی پاسخ گذرای مدار صفر شده و از بین می رود .

به این ترتیب مدار در شرایط پایدار DC خواهد بود.

در این حالت القاگر اتصال کوتاه خواهد بود و خازن مدار باز و مدار معادل به شکل زیر در می آید.



$$i_x = \frac{10}{R_1 + R_2} = 1A \qquad\qquad v_x = R_2 i_x = 5V$$

- برای بدست آوردن معادلات کلی مدارهای شامل منابع DC ، مقاومت و یک خازن یا القاگر از روش زیر استفاده می‌کنیم.

١- با استفاده از KVL یا KCL معادله مدار را به دست می‌آوریم.

٢- اگر معادله شامل انتگرال بود از آن مشتق می‌گیریم تا یک معادله و دیفرانسیل به دست آید.

٣- حل معادله دیفرانسیل به شکل $K_1 + K_2 e^{st}$ خواهد بود.

٤- حل را در معادله دیفرانسیل جایگزین کنید تا مقادیر k_1 و S^1 را بدست آورید (یا می‌توانید مقدار k_1 را با حل مدار در حالت پایدار(steady state) بدست آورید) .

٥- با استفاده از شرایط اولیه مقدار k_2 را تعیین می‌کنید.

٦- حل نهایی معادله دیفرانسیل را بنویسید.

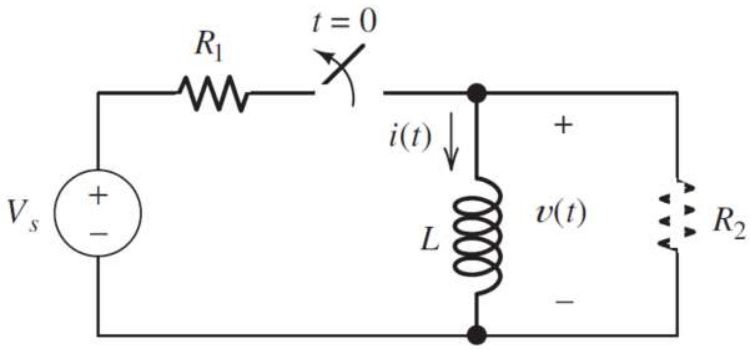
مثال:

مدار مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید مدار قبل از t=0 در حالت پایدار (steady state) است.

i (t) , v (t) را بدست آورید.

قبل از t=0 مدار در حالت پایدار DC است بنابراین القاگرمانند یک اتصال کوتاه عمل میکند.

بنابراین داریم:

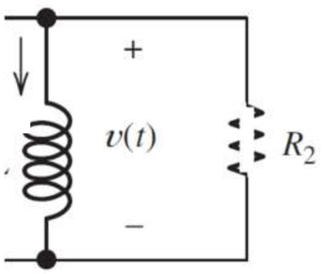


$$v(t) = 0 \qquad , \qquad i(t) = \frac{V_s}{R_1}$$

$$t < 0 \qquad\qquad t < 0$$

برای t<0 جریان در القاگر در جهت عقربه ساعت cw است. بعد از باز کردن کلید چون منبع DC در مدار وجود ندارد پاسخ پایدار مدار صفر خواهد بود بنابراین برای t>0

داریم: $i(t) = Ke^{st}$

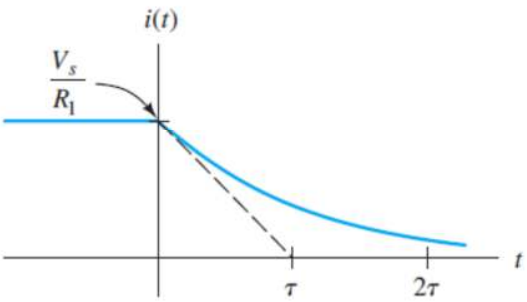


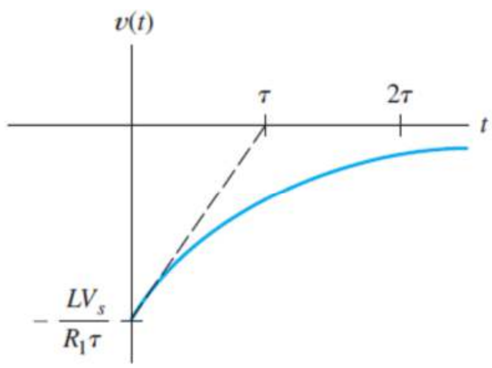
$$L\frac{di}{dt} + R_2 i(t) = 0 \Longrightarrow \text{جایگذاری در معادله} \quad LKse^{st} + R_2Ke^{st} = 0 \Longrightarrow S = -\frac{R_2}{L}$$

از شرایط اولیه در $\boldsymbol{t = 0}$ داریم $\boldsymbol{i(t) = \frac{V_s}{R_1}}$ بنابراین

$$(t > 0) \qquad i(t) = \frac{V_s}{R_1}e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau = \frac{L}{R_2} \Longleftarrow K = \frac{V_s}{R_1}$$

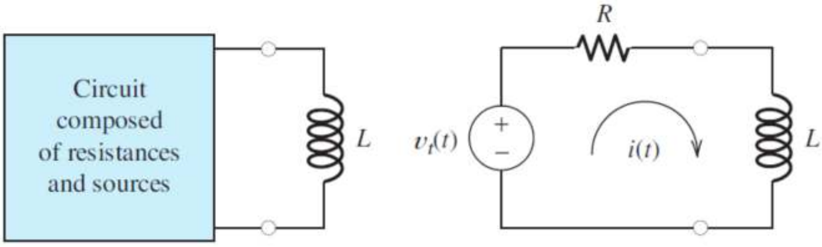
ثابت زمانی





$$t > 0 \quad \text{برای} \Longrightarrow v(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{LV_s}{R_1\tau}e^{-t/\tau} = -\frac{R_2}{R_1}V_se^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{L}{R_2}$$

مدارهای RL و RC با منابع کلی:



مداری به شکل مقابل در نظر بگیرید که شامل ترکیبی از مقاومت‌ها و منابع و یک القاگر است. برای مدار شامل منابع و مقاومت‌ها می‌توان معادل تونن را به دست آورد که شامل یک منبع ولتاژ مستقل v (t) به صورت سری وبا یک مقاومت R_t است. (به طور مشابه مدارهای شامل منابع و مقاومت‌ها و یک خازن به طریق مشابه قابل معادل سازی است).

برای مدار بالا داریم :

$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{v_T(t)}{R} \qquad L\frac{di}{dt} + R_T i = v_T$$

به طور کلی معادله مدار شامل یک القاگر یا یک خازن به شکل زیر خواهد بود:

$$\tau\frac{dx}{dt} + x(t) = f(t)$$

ثابت τ تابعی از مقاومت‌ها و القاگر(یا خازن) بوده و در واقع ثابت زمانی است. منابع مدار به شکل f (t) در معادله نمایان می‌شوند و به همین دلیل f (t) تابع اجباری نامیده می‌شود. معادله فوق دارای دو پاسخ می‌باشد. پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری

پاسخ طبیعی از حل معادله $\tau\frac{dx_c}{dt} + x_c + y = 0$ حاصل می شود و به منابع مدار وابسته نیست.

می‌توان این معادله را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{dx_c(t)/dt}{x_c} = \frac{-1}{\tau} \Longrightarrow In[x_c(t)] = \frac{-t}{\tau} + c \Longrightarrow x_c(t) = e^c e^{-t/\tau} \Longrightarrow x_c(t) = Ke^{-t/\tau}$$

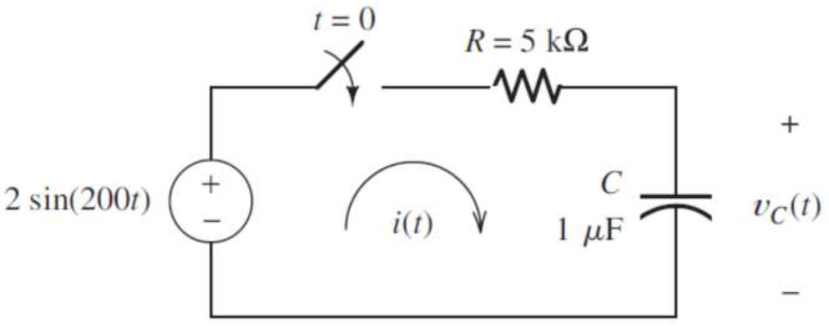
K با افرایش اولیه خازن یا القاگر تعیین می شود.

در طرف دیگر پاسخ اجباری مدار به منابع مدار و تابع اجباری وابسته است. در راه حل خاصی $x_p(t)$ که در رابطه $\tau\frac{dx_p}{dt} + x_p(t) = f(t)$ صدق کند یک پاسخ اجباری مدار است. معمولا شکل پاسخ اجباری به شکل تابع اجباری و مشتقات آن است. به طور مثال اگر $f(t) = 10\cos(200t)$ باشد پاسخ اجباری $x_p(t) = A\cos(200t) + B\sin(200t)$ که با جایگزینی این رابطه در معادله مدار می‌توان ضرایب A و B را به دست آورد.

مثال :

$v_C(0) = 1\text{ V}$ **(به دلیل بار اولیه)**

برای مدار داده شده جریان را بیابید برای خازن داریم:



$$\xrightarrow{\text{KVL}} \quad Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+v_C(0)-2\sin(200t)=0$$

$$\xrightarrow{d/dt} \quad R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=400\cos(200t)$$

$$\longrightarrow RC\frac{di}{dt}+i(t)=400C\cos(200t)$$

$$\longrightarrow 5\times10^{-3}\frac{di}{dt}+i(t)=400\times10^{-6}\cos(200t)$$

پاسخ اجباری :

$$i_p(t)=A\cos(200t)+B\sin(200t) \longrightarrow$$

$$(-A\sin(200t)+B\cos(200t))\cancel{200}\times\cancel{5\times10^{-3}}+A\cos(200t)+B\sin(200t)$$

$$=400\times10^{-6}\cos(200t)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} B-A=0 \\ B+A=400\times10^{-6} \end{cases} \longrightarrow A=B=200\times10^{-6}=200\ \mu A$$

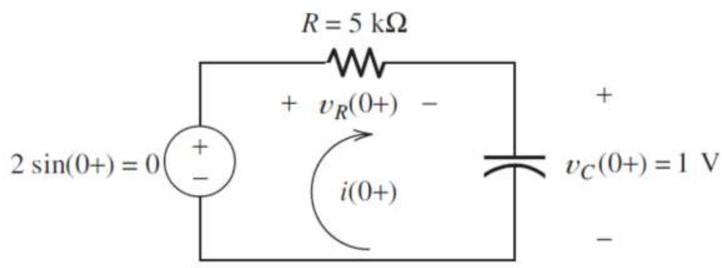
$$\longrightarrow i_p(t)=200\cos(200t)+200\sin(200t)\ \mu A=200\sqrt{2}\cos(200t-45^\circ)$$

پاسخ طبیعی :

$$RC\frac{di}{dt}+i(t)=0 \longrightarrow i_c(t)=Ke^{-t/RC}=Ke^{-t/5\times10^{-3}}$$

$$i(t) = i_p(t) + i_c(t) = 200\cos(200t) + 200\sin(200t) + Ke^{-t/5\times10^{-3}}$$

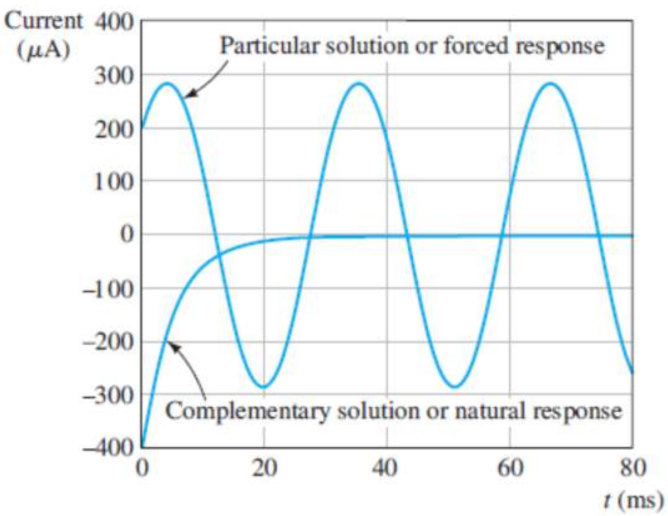
برای لحظه t=0 مدار به شکل زیر است:

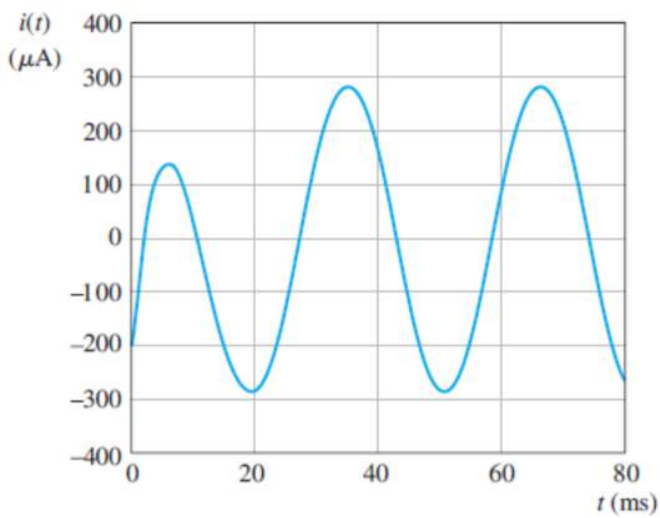


$$i(0) = \frac{v_R(0)}{R} = \frac{-1}{5\,k} = -200\mu A$$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow$ $200 + K = -200 = i(0)$ $\Rightarrow$ $K = -400\mu A$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = 200\cos(200t) + 200\sin(200t) - 400e^{-t/5\times10^{-3}}\mu A}$$



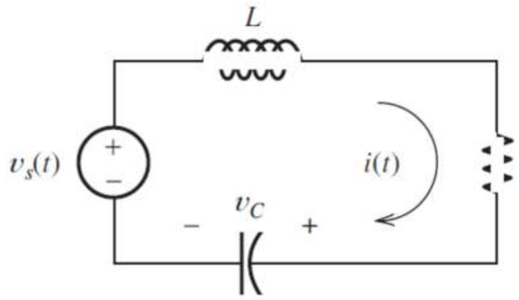


مبانی برق ۱ – جلسه هفتم

مدارهای درجه ۲

مدارهای شامل دو المان ذخیره انرژی (خازن و القاگر) دارای معادله دیفرانسیل از دسته دو می‌باشند

به طور مثال مدار زیر را درنظر بگیرید.



KVL $\Longrightarrow$ $L\dfrac{di}{dt}+Ri(t)+\dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)dt+v_C(0)=v_s(t)$

مشتق گیری $\Longrightarrow$ $L\dfrac{d^2i}{dt^2}+\dfrac{R\,di}{dt}+\dfrac{1}{C}i(t)=\dfrac{dv_s}{dt}$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=\frac{1}{L}\frac{dv_s}{dt}}$$

برای مدار دیفرانسی RLC ضریب دمپینگ (Damping Coefficient) برابر است با $\propto=\dfrac{R}{2L}$

همچنین فرکانس رزونانس (Resonance Frequency) برابر است با $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

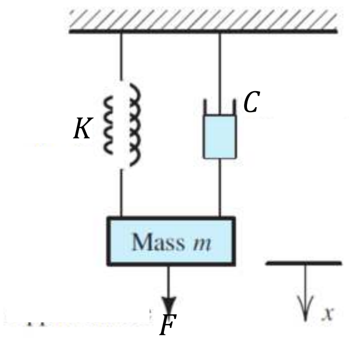
تابع اجباری برابرست با $f(t)=\dfrac{1}{L}\dfrac{dv_s}{dt}$

با تعاریف داده شده معادله دیفرانسیل RLC به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\propto\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i(t)=f(t)$$

این معادله خطی یک معادله دیفرانسیل دسته دو است با ضرایب ثابت. توجه کنید که دلیل حاصل شدن معادله درجه دو وجود دو المان ذخیره انرژی در مدار است.

مشابه این معادله دیفرانسیل در سیستم‌های مکانیکی جرم - فنر - دمپر حاصل می‌شود. به طور مثال برای یک سیستم جرم - فنر - دمپر مطابق شکل داریم:



$Mx+Cx+Kx=F \Longrightarrow \dfrac{dx^2}{dt^2}+\dfrac{C}{M}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{K}{M}x(t)=\dfrac{F}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\propto\frac{dx}{dt}+\omega_0^2 x(t)=f(t)$$

را حل معادله دیفرانسیل درجه دو :

معادله دارای جواب کلی $x(t) = x_p(t) + x_C(t)$ است. که X_P پاسخ جباری X_L پاسخ طبیعی است هر پاسخ $X_{P(T)}$ که در معادله بالا صدق کند و تابع اجباری F (t) را نتیجه دهد پاسخ اجباری نامیده می‌شود. در این درس با توابع اجباری ثابت (DC) و سینوسی کار می‌کنیم. در حالت (DC) برابر یافتن پاسخ اجباری می‌توان القاگرها را با اتصال کوتاه و خازن‌ها را با مدار باز جایگزین می‌کنیم. حالت خاص تابع اجباری سینوسی را در فصل بعد بررسی می‌کنیم. برای یافتن پاسخ طبیعی طرف راست معادله را صفر قرار می‌دهیم $\frac{d^2x_C}{dt^2} + 2 \propto \frac{dx_C}{dt} + \omega_0^2 x_C(t) = 0$ برای حل این معادله پاسخ را به شکل Ke^{st} فرض می کنیم و در معادله جایگزین میکنیم.

$$s^2Ke^{st} + 2 \propto sKe^{st} + \omega_0^2Ke^{st} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (s^2 + 2 \propto s + \omega_0^2)Ke^{st} = 0$$

به معادله $s^2 + 2 \propto s + \omega_0^2 = 0$ **معادله مشخصه** (Characteristic Equation) گوییم که دارای دو پاسخ زیر می باشد.

$$s_1 = -\propto + \sqrt{\propto^2 - \omega_0^2} \qquad , \qquad s_2 = -\propto - \sqrt{\propto^2 - \omega_0^2}$$

نسبت $\frac{\propto}{\omega_0}$ را با نام نرخ دمپینگ (Damping Rate) نامیده می شود و با ζ نشان داده می شود. ۳ حالت در نظر میگیریم :

۱- حالت $\zeta>1$ یا حالت (Over Damped) $(\omega_0<\alpha)$: در این حالت معادله مشخصه دارای دو پاسخ حقیقی و مجزاست بنابراین :

$$x_c(t) = K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t}$$

۲- حالت $\zeta=1$ یا حالت (Critically Damped) $(\omega_0=\alpha)$: در این حالت معادله مشخصه دارای ریشه‌های حقیقی و یکسان است بنابراین

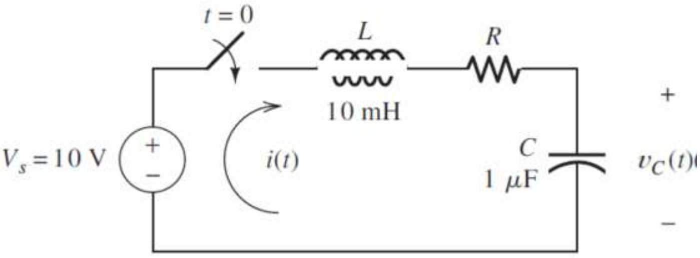
$$x_c(t) = K_1e^{s_1t} + K_2te^{s_1t}$$

۳-حالت $\zeta<1$ یا حالت (Under Damped) $(\omega_0>\alpha)$: در این حالت ریشه ها مختلف هستند به شکل $s_1 = -\propto + j\omega_n$ و $s_2 = -\propto - j\omega_n$ که $(j = \sqrt{-1})$ و $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \propto^2}$ فرکانس طبیعی نامیده می‌شود. در این حالت پاسخ طبیعی سیستم به شکل زیر است:

$$x_c(t) = K_1e^{-\propto t}\cos(\omega_n t) + K_2e^{-\propto t}\sin(\omega_n t)$$

مثال :

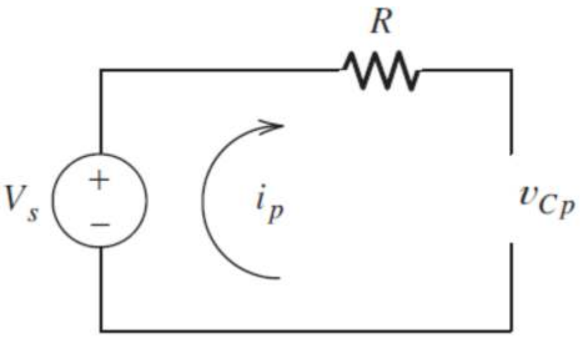
برای مدار RLC در لحظه $t = 0$ داریم سوئیچ بسته می‌شود و ز $v_C(0) = 0\ ,\ i(0) = 0$ معادله دیفرانسیل برای $v_C(t)$ را بیابید و برای $R = 100{,}200{,}300\,\Omega$ مقدار $v_C(t)$ را بدست آورید .



$$\left.\begin{aligned} i(t) &= C\frac{dv_C}{dt} \\ L\frac{di}{dt} + Ri(t) + v_C(t) &= V_s \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = V_s \Rightarrow \boxed{\frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{V_s}{LC}}$$

برای حل این معادله دیفرانسیل جواب اجباری را برای منبع DC به دست می‌آوریم . برای این کار القاگر را با اتصال کوتاه و خازن را با مدار باز جایگزین می‌کنیم.



بنابراین جریان در مدار صفر بوده $(i_p = 0)$ و ولتاژ دو سر خازن برابر $v_s = 10V$ است .

$$v_{Cp}(t) = V_s = 10\ V$$

برای بدست آوردن پاسخ طبیعی معادله دیفرانسیل برای هر حالت داریم

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4$$

$R = 300\Omega$ (1

$$\propto = \frac{R}{2L} = 1.5 \times 10^4 \ > \omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{\propto}{\omega_0} = 1.5 > 1$$

معادله مشخصه دارای دو پاسخ حقیقی و مجزاست

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\propto + \sqrt{\propto^2 - \omega_0^2} \\ \quad = -2.618 \times 10^4 \\ s_2 = -\propto - \sqrt{\propto^2 - \omega_0^2} \\ \quad = -0.382 \times 10^4 \end{cases} \Rightarrow v_C(t) = \underbrace{10}_{v_{Cp}} + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

جایگذاری در معادله و چک کردن شرایط اولیه

$$v_C(0) = 0 \Rightarrow 10 + K_1 + K_2 = 0$$

$$i(0) = 0 \quad , \quad i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_C(0)}{dt} = 0 \Rightarrow s_1 K_1 + s_2 K_2 = 0$$

$$K_1 = 1.708 \qquad K_2 = -11.708$$

$$\Rightarrow \boxed{v_C(t) = 10 + 1.708e^{s_1 t} - 11.708e^{s_2 t}}$$

$R = 200\Omega$ (2

$$\propto = \frac{R}{2L} = 10^4 = \omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{\propto}{\omega_0} = 1 \Rightarrow$$

معادله مشخصه دارای دو پاسخ حقیقی و یکسان است.

$$s_1 = s_2 = -\propto = -10^4$$

$$v_C(t) = 10 + K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_1 t}$$

جایگذاری در معادله و چک کردن شرایط اولیه

$$\Rightarrow \begin{matrix} v_C(0) = 0 \\ 10 + K_1 = 0 \end{matrix} \quad , \quad \frac{dv_C(0)}{dt} = 0 \Rightarrow s_1 K_1 + K_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -10 \\ K_2 = -10^5 \end{cases}$$

$$\boxed{v_C(t) = 10 - 10e^{s_1 t} - 10^5 t e^{s_1 t}}$$

$R = 100\Omega$ (3

$$\propto = \frac{R}{2L} = 0.5 \times 10^4 < \omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{\propto}{\omega_0} = 0.5 \Rightarrow$$

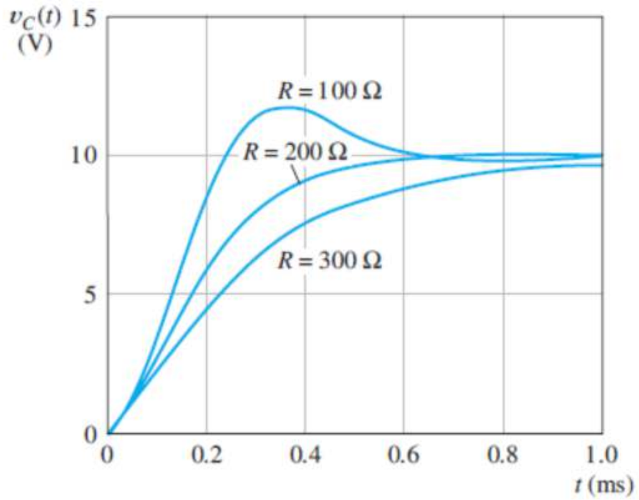
معادله دارای دو پاسخ مختلط است

در این حالت فرکانس طبیعی سیم برابراست با : $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \propto^2} = 8660$ و جواب کلی معادله به شکل زیر است:

$$v_C(t) = 10+K_1e^{-\propto t}\cos(\omega_n t) + K_2e^{-\propto t}\sin(\omega_n t)$$

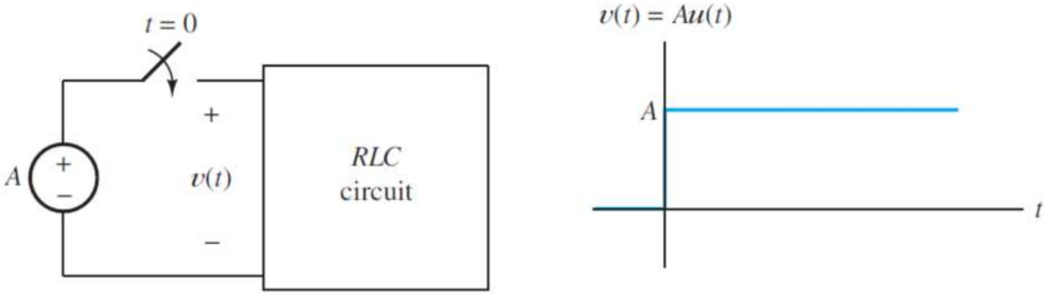
جایگذاری در معادله و چک کردن شرایط اولیه

$$\left.\begin{matrix} v_C(0) = 0 \\ \dfrac{dv_C(0)}{dt} = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{matrix} 10 + K_1 = 0 \\ -\propto K_1 + \omega_n K_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -10 \\ K_2 = -5.774 \end{cases}$$



پاسخ پله به معادله دسته دو :

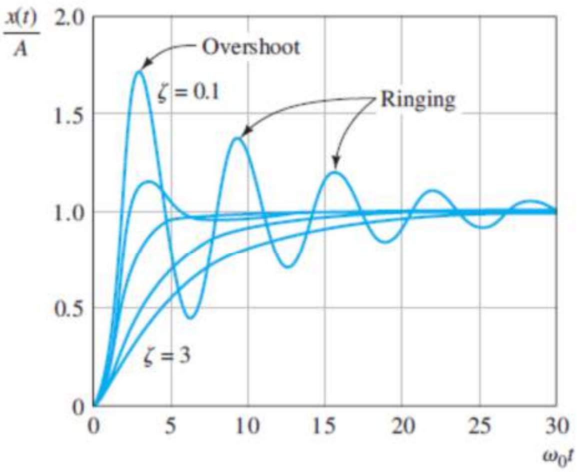
هنگامی که به صورت ناگهانی یک منبع ثابت را وارد مداری می کنیم (به طور مثال سوئیچ منبع DCرا وصل می کنیم) به اصطلاح گفته می‌شود تابع اجباری یک تابع پله (Step Function) است که با u(t) نشان داده می‌شود. $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ به طور مثال اگر در یک مدار با منبع ولتاژ A ولت سوئیچ را در لحظه t=0 ببندیم $v(t) = Au(t)$ با این تابع اجباری معادله دیفرانسیل مدار RLC به شکل زیر است :



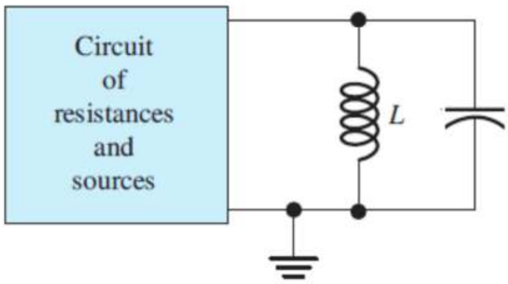
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\propto\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = Au(t)$$

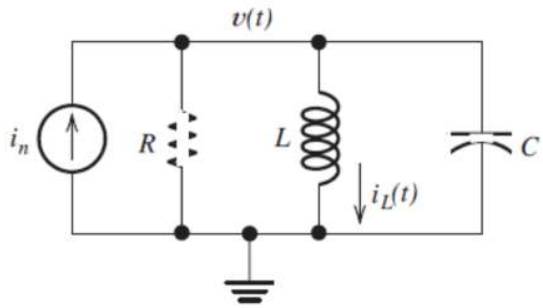
پاسخ کلی معادله فوق به فرکانس رزونانسی ω_0 و نرخ دمپینگ $\zeta = \frac{\propto}{\omega_0}$ و البته به شرایط اولیه وابسته است . برای شرایط اولیه $\acute{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$ پاسخ زمان داده شده به شکل زیر خواهد بود:

برای مقادیر کوچک ζ<1 پاسخ سیستم arboot و همچنین پدیده ringing را قبل از رسیدن به پاسخ پایدار steady-stote نشان می‌دهد . بنابراین اگر بخواهیم سیستم دسته دو را طوری طراحی کنیم که سریعاً به حالت پایدار برسد نرخ دمپینگ را حول مقدار 1 طراحی می‌کنیم .



مدار های با خازن و القاگر موازی :





مداری شامل القاگر و خازن موازی و مجموعه‌ای از مقاومت‌ها و منابع در نظر بگیرید. می‌توان از مدار که شامل مقاومت و منابع است با معادل نورتن جایگزین کرد به این ترتیب مدار معادل به شکل یک مدار موازی RLC تبدیل می‌شود.

$$KCL \Longrightarrow C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + i_L(0) = i_n(t)$$

$$\text{مشتق گیری} \Longrightarrow C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v(t) = \frac{di_n}{dt} \Longrightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{C}\frac{di_n(t)}{dt}$$

در این حالت ضریب دمپینگ $\propto = \frac{1}{2RC}$ فرکانس رزونانسی $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ وتابع اجباری برابر است با

$$f(t) = \frac{1}{C}\frac{di_n}{dt}$$

معادله به شکل استاندارد دسته دو تبدیل می شود:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \propto \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v(t) = f(t)$$

حل مشابه به حالت سری است.

آنالیز سینوسی پایدار (Steady - Statc Sinosoidal Anaiysis)

جریان ولتاژ سینوسی:

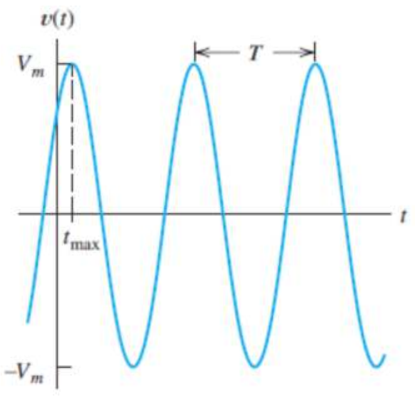
یک ولتاژ سینوسی به شکل مقابل است:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

که V_m ولتاژ ماکزیمم (Peak Voltage) است، ω فرکانس زاویه‌ای (Angular Frequency) با واحد $\theta = \frac{rad}{s}$ زاویه‌ای فاز است .

همانطور که می‌دانیم توابع سینوسی تناوبی هستند (Periodic) که طبق تعریف داریم برای دوره تناوب T:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$



که در رابطه بالا f فرکانس است که برابر تعداد سیکل‌ها (تناوب‌ها) در ثانیه است.

به یاد داشته باشید که یک تابع سینوسی را می‌توان بر حسب تابع کسینوس نوشت:

$$\sin(t) = \cos(t - 90°)$$

مقادیر Root - Mean - Square (RMS)

برای توابع پریودیک مقدار RMS تابع به شکل زیر تعریف می‌شود(برای ولتاژ و جریان تناوبی)

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} \qquad I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

مقادیر RMS ولتاژ و جریان به صورت خاص در محاسبه توان مصرفی یک المان الکتریکی کاربرد دارند، مثلاً برای یک مقاومت:

$$p(t)=\frac{v^2(t)}{R}\xrightarrow[\text{انرژی در یک دوره متناوب}]{}E_T=\int_0^T p(t)dt\xrightarrow[\text{انرژی متوسط مصرف شده در مقاومت}]{}p_{avg}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

$$P_{avg}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{v^2(t)}{R}dt=\frac{\left[\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt}\right]^2}{R}=\frac{V_{rms}^2}{R}$$

به طرق مشابه میتوان نوشت:

$$P_{avg}=RI_{rms}^2$$

مقدار RMS یک تابع سینوسی:

$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta)$$

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2\cos^2(\omega t+\theta)dt}\xrightarrow[\cos^2(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)]{}V_{rms}=\sqrt{\frac{V_m^2}{2T}\int_0^T[1+\cos(2\omega t+2\theta)]dt}$$

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{V_m^2}{2T}\left[t+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+2\theta)\right]_0^T}=\sqrt{\frac{V_m^2}{2T}\left[T+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T+2\theta)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)\right]}$$

داریم:

$$\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T+2\theta)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)=\frac{1}{2\omega}\sin(4\pi+2\theta)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)=0$$

$$\Longrightarrow\ V_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

در بسیاری از مدار مقدار RMS ولتاژ به جای مقدار ماکزیمم ولتاژ داده می‌شود. به طور مثال وقتی می‌گوییم جریان برق شهری 220V است این مقدار ولتاژ RMS برق شهر ثابت، تعداد ماکزیمم ولتاژ برابر است با

$$V_m=220\sqrt{2}\cong 311\ V$$

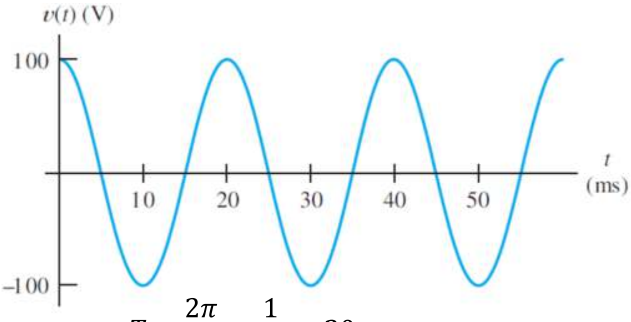
توجه کنید که برای توابع غیر سینوسی مقدار V_{rms} محاسبه شده در بالا الزاما صدق نمی‌کند و باید V_{rms} محاسبه شود .

مثال :

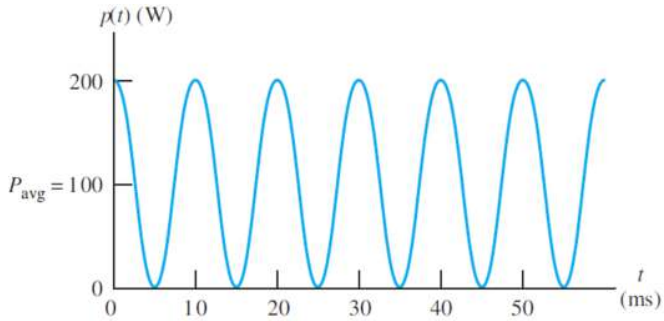
فرض کنید ولتاژ داده شده به یک مقاومت $R = 50\Omega$ به صورت $V(t) = 100\cos(100\pi t)\,V$ می‌باشد. مقدار V_{rms} را بیابید و توان متوسط را محاسبه کنید. توان را بر حسب تابعی از زمان بیابید:

$$V_m = 100V \Longrightarrow V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 70.71\ V \Longrightarrow P_{avg} = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{70.71^2}{50} = 100\ W$$

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{100^2 cos^2(100\pi t)}{50} = 200cos^2(100\pi t)W = 100 + 100\cos(200\pi t)$$

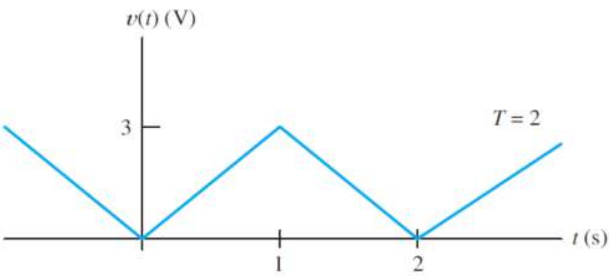


$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{50} = 20ms$$



مثال :

ولتاژ نشان داده شده در شکل با عنوان ولتاژ مثلثی (Triangolar) شناخته می‌شود . تعداد RMS آن را تعیین کنید .



$$v(t) = \begin{cases} 3t & 0 \le t \le 1 \\ 6 - 3t & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\int_0^1 9t^2 dt + \int_1^2 (6-3t)^2 dt\right]} = \sqrt{3}V$$

مبانی برق ۱ – جلسه هشتم

فازور (Phasor)

در این بخش خواهیم دید که آنالیز جریان و ولتاژ سینوسی پایدار با استفاده از بردارها یا فازورها در فضای مختلف بسیار آسان می‌شود. برای شروع مسئله جمع کردن یا کم کردن توابع سینوسی را در نظر بگیرید. به طور مثال این مسئله پس از اعمال KVL یا KCL در مدار رخ می‌دهد. به طور مثال اگر $v(t) = 10\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t + 60°) + 5\cos(\omega t + 90°)$ و بخواهیم آن را به صورت استاندارد $v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$ بنویسیم ابتدا هر یک از ترم‌ها را بر اساس زاویه باز و ولتاژ ماکزیمم به صورت یک بردار در فضای مختلف بیان می‌کنیم. این بردارها را فازور می‌نامند. سپس به آسانی فازورها را جمع یا کم می‌کنیم و دوباره به شکل تابع سینوسی در می‌آوریم.

تعریف فازور :

برای یک ولتاژ کسینوسی به شکل $v_1(t) = V_1\cos(\omega t + \theta_1)$ فازور را به شکل زیر تعریف میکنیم:

زاویه

$$V_1 = V_1\angle\theta_1$$

در واقع فازور یک عدد مختلط است که اندازه آن برابر با ولتاژ ماکزیمم یا پیک است و زاویه آن برابر با زاویه فاز تابع کسینوسی است.

به طور مشابه برای یک ولتاژ سینوسی داریم:

$$V(t) = V_2\sin(\omega t + \theta_2) \Rightarrow V(t) = V_2\cos(\omega t + \theta_2 - 90°) \Rightarrow V = V_2\angle\theta_2 - 90°$$

به طور مشابه برای جریان داریم:

$i(t) = I_1\cos(\omega t + \theta_1)$ ← فازور $i = I_1\angle\theta_1$ و $i(t) = I_2\sin(\omega t + \theta_2)$ ← فازور

$$i = I_2\angle\theta_2 - 90°$$

نکته: دلیل بیان تابع کسینوسی به شکل فازور از آنجاست که داریم:

$$(e^{j\omega t} = \underbrace{\cos((\omega t)}_{Re} + \underbrace{j\sin(\omega t))}_{Im}$$

$$V\cos(\omega t + \theta) = Re\left(ve^{j(\omega t+\theta)}\right) = Re\left[v.e^{j\theta}.e^{j\omega t}\right]$$

قسمت حقیقی

به طور مثال برای $v(t) = 10\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t + 60°) + 5\cos(\omega t + 90°)$ میتوان نوشت:

$$v(t) = 10\cos(\omega t) + 5\cos(\omega t + 60° - 90°) + 5\cos(\omega t + 90°)$$

$$v(t) = Re[10e^{j\omega t}] + Re\left[5e^{j(\omega t - 30°)}\right] + Re\left[5e^{j(\omega t + 90°)}\right] = Re\left[\underbrace{\left(10 + 5e^{-j30°} + 5e^{j90°}\right)}_{10\angle 0° + 5\angle -30° + 5\angle 90°} e^{j\omega t}\right]$$

$$10\angle 0 + 5\angle -30° + 5\angle 90° = 10 + 4.33 - 2.5j + 5j = 14.33 + 2.5j$$

$$= 14.54\angle 9.9°$$

$$v(t) = Re\left[14.54e^{j9.9°}e^{j\omega t}\right] = 14.54\cos(\omega t + 9.9°)$$

مثال :

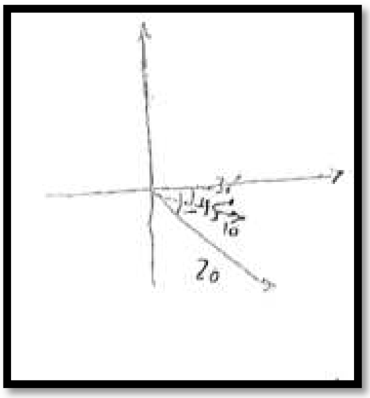
$v_1(t) = 20\cos(\omega t - 45°)$ و $v_2(t) = 10\sin(\omega t + 60°)$ مقدار $V_s(t) = V_1(t) + V_2(t)$ بر حسب یک ترم بنویسید.

$$V_1 = 20\angle -45° \quad , \quad V_2 = 10\angle 60° - 90° = 10\angle -30°$$

$$V_s = V_1 + V_2 = 14.14 - 14.14\,j + 8.66 - 5\,j$$

$$= 22.8 - 19.14\,j = 29.77\angle -40.01°$$

$$\Rightarrow v_s(t) = 29.77\cos(\omega t - 40.01°)$$



امپدانس مختلط (Complex Impedance) :

در این بخش با استفاده از فازورها می‌توان مسائل جریان / ولتاژ مدارهای با منابع سینوسی را در حالت پایدار حل کرد.

القاگر :

فرض کنید جریان در یک القاگر به شکل سینوسی باشد، $i_L(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$

برای ولتاژ داریم $v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$ بنابراین $v_L(t) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta)$

بر اساس تحلیل فازور داریم:

$$I_L = I_m\angle\theta - 90° \Longrightarrow V_L = \omega L I_m\angle\theta = V_m\angle\theta$$

یا می‌توان نوشت

$$V_L = (\omega L\angle 90°) \times I_m\angle(\theta - 90°)$$

$$V_L = (\omega L\angle 90°) \times I_L = j\omega L \times I_L$$

به عبارت $j\omega L = \omega L\angle 90°$ امپدانس مختلط القاگر گوییم و با Z_L نشان می‌دهیم. به عبارتی همانند قانون اهم داریم $V_L = Z_L.I_L$

با این تفاوت که در این رابطه امپدانس یک مقدار مبهمی است و گاهی راکتانس (Reactance) نامیده می‌شود .

خازن:

به طور مشابه در یک خازن داریم اگر جریان و ولتاژ سینوسی باشند، فازورها طبق رابطه ای مشابه قانون اهم با هم ارتباط دارند.

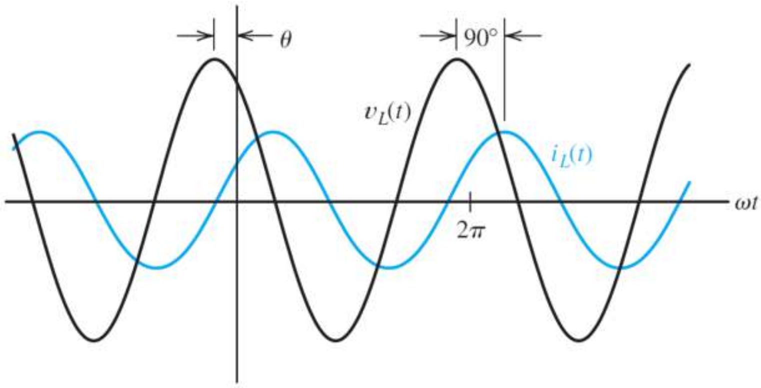
$$V_C = Z_C.I_C$$

امپدانس مختلط خازن Z_C برابر است با:

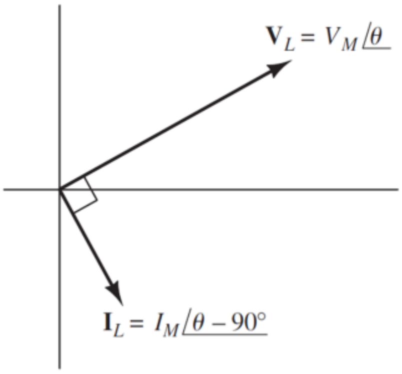
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle - 90°$$

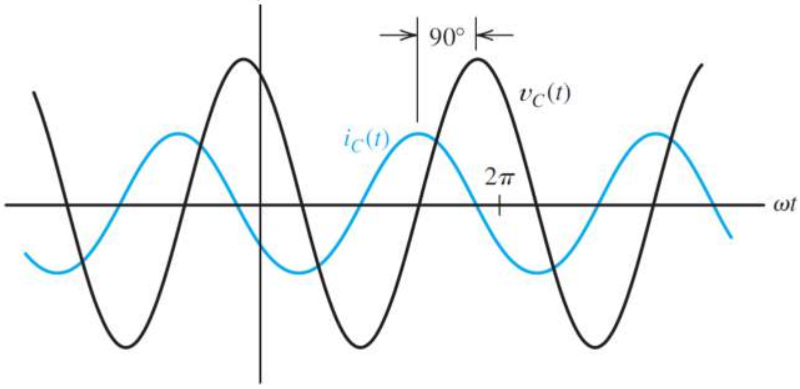
$$V_C = V_m\angle\theta \qquad I_C = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{V_m\angle\theta}{(1/\omega C)\angle - 90°} = \underbrace{\omega C V_m}_{I_m}\angle\theta + 90° \Longrightarrow I_C = I_m\angle\theta + 90°$$

در واقع شکل برداری فازورها برای خازن و القاگر به شکل زیر است:

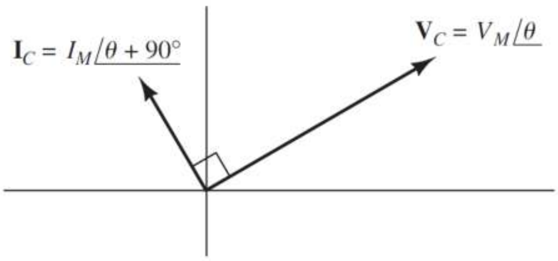


القاگر





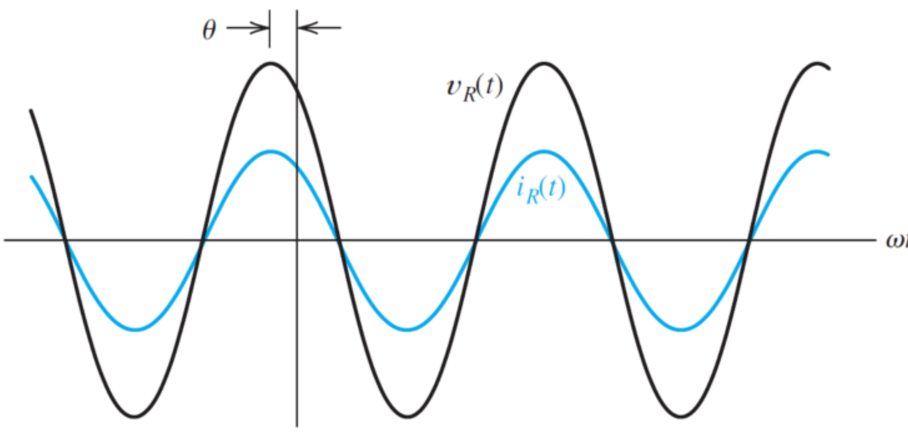
خازن

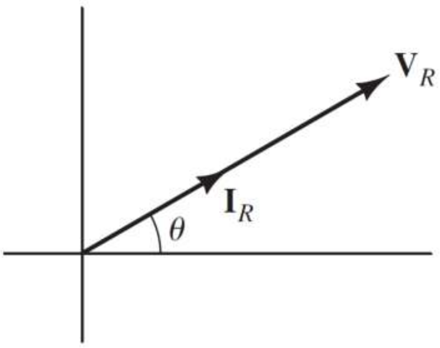


همانطور که می‌بینیم برای القاگر جریان به اندازه $90°$ نسبت به ولتاژ تأخیر فاز دارد و برای خازن جریان به اندازه $90°$ نسبت به ولتاژ پیش فاز است.

مقاومت:

برای مقاومت، طبق قانون اهم داریم $V_R = R.I_R$ که در اینجا امپدانس مقاومت یک مقدار حقیقی است بنابراین جریان و ولتاژ هم فاز هستند.





آنالیز مدارها با فازور و امپدانس مختلط:

قوانین کیرشهف با استفاده از فازور:

طبق آنچه که از kvl میدانیم مجموع ولتاژها برای یک مسیر بسته در یک مدار الکتریکی صفر است.

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$$

اگر ولتاژها سینوسی باشند می‌توان آنها را با فازور نشان داد و بنابراین رابطه kvl اینطور بیان می‌شود که مجموع فازورهای ولتاژ در یک مسیر بسته در مدار صفر است.

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

به طور مشابه برای قانون kcl داریم مجموع فازورهای جریان ورودی به یک نود برابر است با مجموع فازورهای خروجی از یک نود در مدار.

راه حل کلی برای تحلیل مدارهای با منابع سینوسی در حالت پایدار (Stwady-State) :

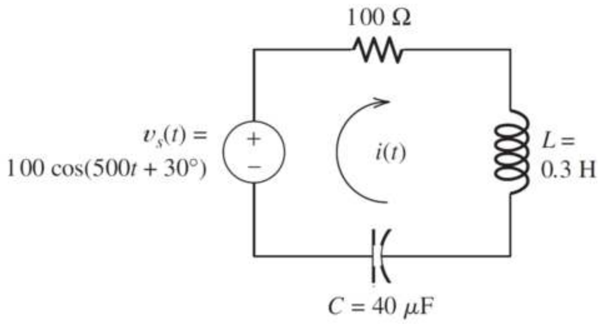
۱- ابتدا منابع ولتاژ و جریان به شکل وابسته به زمان را با فازورها جایگزین می‌کنیم.(توجه کنید که همه منابع باید دارای فرکانس یکسان باشند).

۲- القاگرها را با امپدانس مختلط $Z_1 = j\omega L = \omega L\angle 90°$ جایگزین کنید. خازن‌ها را با امپدانس مختلط $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -90°$ جایگزین کنید. مقاومت‌ها دارای امپدانس برابر با مقدار خودشان هستند .

۳- با استفاده از KVL یا KCL یا هر تکنیک دیگری که برای مدارهای DC گفته شد مدار را تحلیل کنید و توجه کنید که محاسبات باید به صورت مختلط انجام شود.

مثال :

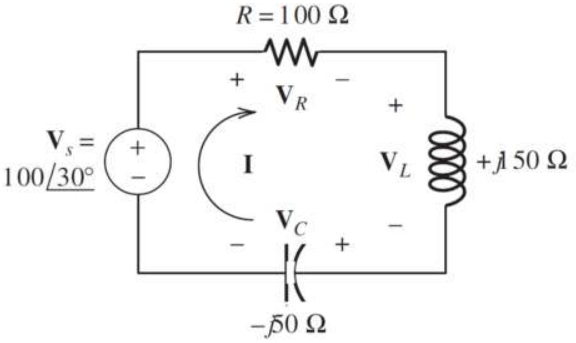
جریان پایدار Steady-State را در مدار مقابل بیابید. همچنین فازور ولتاژ برای هر المان را بیابید و دیاگرام فازور را بکشید.



$$Z_L = j\omega L = j\,500 \times 0.3 = 150\,j\Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{500 \times 40 \times 10^{-6}} = -50\,j\Omega$$

$$Z_R = R = 100\Omega$$



$$Z_{eq} = Z_L + Z_C + Z_R = 100 + 100\,j = 141.4\angle 45°$$

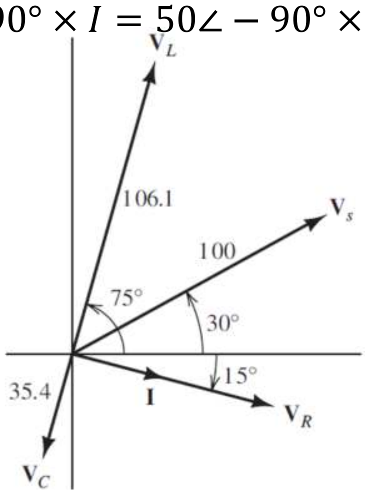
$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{100\angle 30°}{141.4\angle 45°} = 0.707\angle -15°$$

$$i(t) = 0.707\cos(500t - 15°)$$

$$V_R = R \times I = 100 \times 0.707\angle -15° = 70.7\angle -15°$$

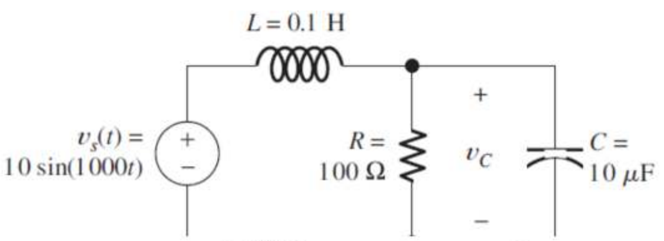
$$V_L = j\omega L \times I = \omega L\angle 90° \times I = 150\angle 90° \times 0.707\angle -15° = 106.1\angle 75°$$

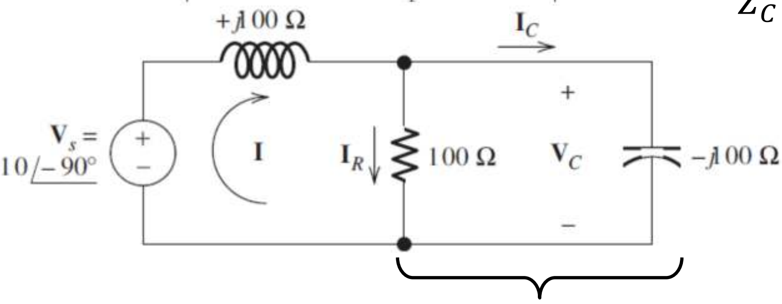
$$V_C = -j\frac{1}{\omega C} \times I = \frac{1}{\omega C}\angle -90° \times I = 50\angle -90° \times 0.707\angle -15° = 35.4\angle -105°$$



مثال :

مدار شکل مقابل را در نظر بگیرید ولتاژ $V_C(t)$ را در حالت پایدار Steady-State بیابید . فازور جریان عبوری از هر المان را بیابید و دیاگرام فازور شامل جریان‌ها و منبع ولتاژ را بکشید.



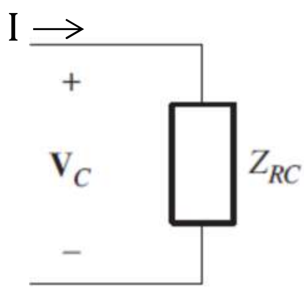


$$V_s = 10\angle -90°$$

$$Z_L = j\omega L = j\,1000 \times 0.1 = 100\,j\Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{1000 \times 10 \times 10^{-6}} = -100\,j\Omega$$

$$Z_{RC} = \frac{1}{{}^{1}/_{R} + {}^{1}/_{Z_C}} = \frac{1}{{}^{1}/_{100} + {}^{1}/_{-j100}}$$



$$= \frac{1}{0.01+0.01j} = \frac{1\angle 0°}{0.01414\angle 45°} = 70.71\angle -45°$$

$$= 50 - 50\,j$$

با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_C = V_s \frac{Z_{RC}}{Z_L + Z_{RC}} = 10\angle -90° \frac{70.71\angle -45°}{100\,j + 50 - 50\,j}$$

$$= \frac{70.71\angle -45°}{70.71\angle 45°} \Rightarrow V_C = 10\angle -90° \frac{70.71 -45°}{70.71\angle 45°}$$

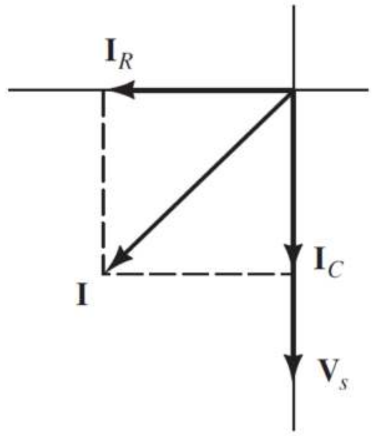
$$= 10\angle -180°$$

$$v_C(t) = 10\cos(1000t - 180°) = -10\cos(1000t)$$

$$I = \frac{V_s}{Z_L + Z_{RC}} = \frac{10\angle -90°}{100\,j + 50 - 50\,j} = \frac{10\angle -90°}{70.71\angle 45°} = 0.1414\angle -135°$$

$$I_R = \frac{V_C}{R} = \frac{10\angle -180°}{100} = 0.1\angle -180°$$

$$I_C = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{10\angle -180°}{-100\,j} = \frac{10\angle -180°}{100\angle -90°} = 0.1\angle -90°$$

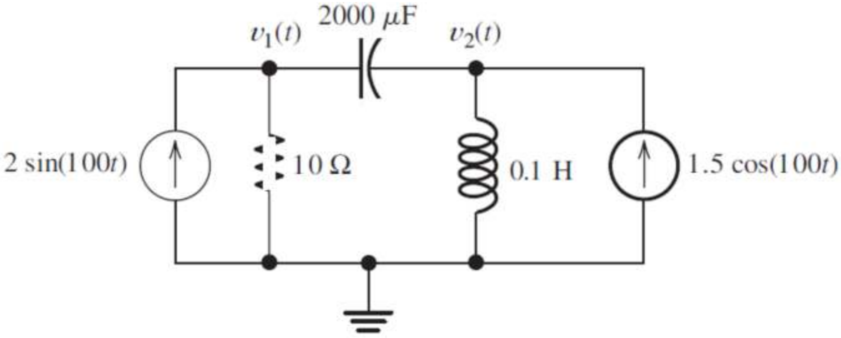


آنالیز نود ولتاژ و جریان مش:

توجه کنید که آنالیز نود ولتاژ و جریان مش در حالت پایدار با منابع AC سینوسی با استفاده از فازورها قابل پیاده‌سازی است. با یک مثال نشان می‌دهیم.

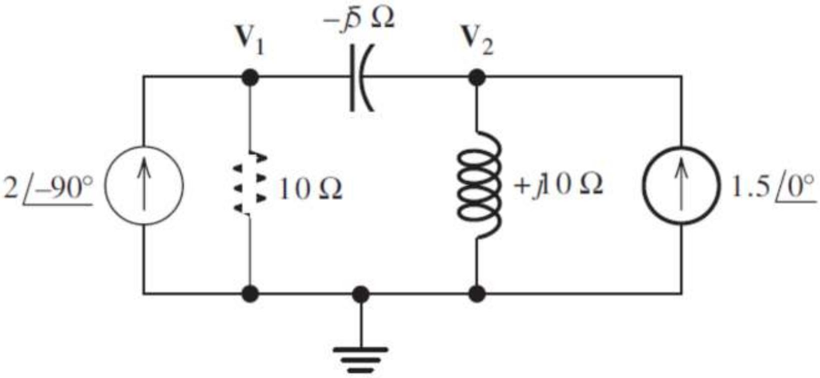
مثال :

با استفاده از نود ولتاژ $V_1(t)$ را برای حالت پایدار Steady-State برای مدار زیر بیابید.



$$Z_e = \frac{-1}{\omega C} j = -5\,j\Omega$$

$$Z_L = \omega L j = 10 j\Omega$$



$$\frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{-5\,j} = 2\angle -90° = 0$$

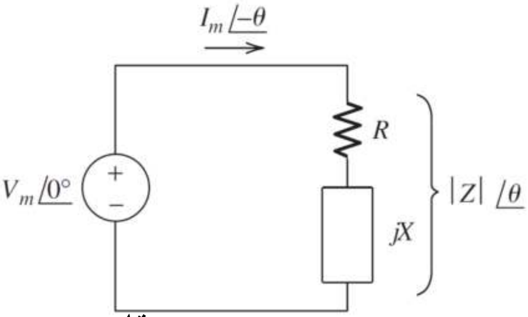
$$\frac{V_2}{10\,j} - \frac{V_1 - V_2}{-5\,j} = 1.5\angle 0° = 0$$

$$\begin{cases} (0.1 + 0.2\,j)V_1 - 0.2\,jV_2 = -2\,j \\ -0.2\,jV_1 + 0.1\,jV_2 = 1.5 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 16.1\angle 29.7°$$

$$V_1(t) = 16.1\cos(100t + 29.7°)$$

توان در مدارهای AC :

فرض کنید در مدار شکل مقابل ولتاژ $v(t) = v_m\cos(\omega t)$ به مدار اعمال می‌شود(که شامل مقاومت، خازن و القاگر است).



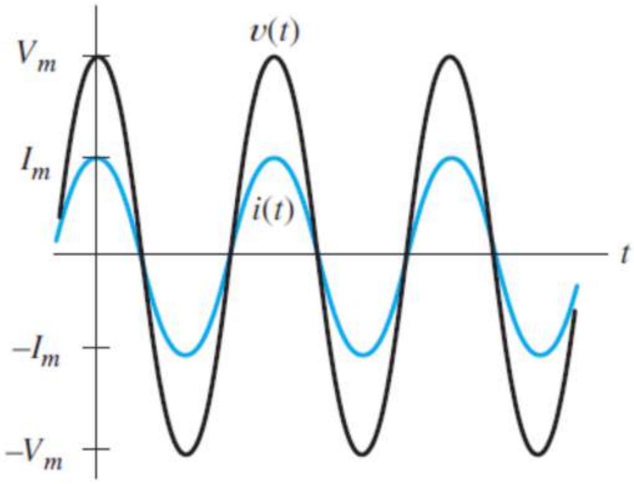
$$V = V_m\angle 0° \qquad Z = |Z|\angle\theta° \Rightarrow I = \frac{V}{Z} = \frac{V_m\angle 0°}{|Z|\angle\theta°} = I_m\angle -\theta°$$

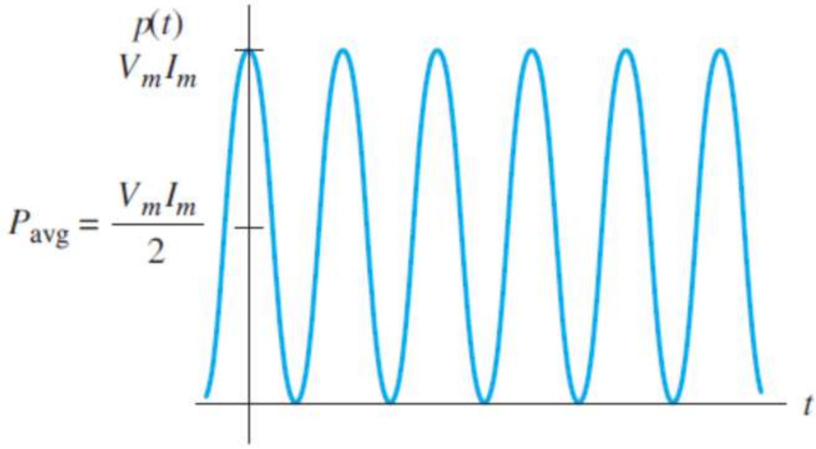
$$I_m = \frac{V_m}{|Z|}$$

توان انتقالی به یک مقاومت تنها، القاگر تنها و خازن تنها را بررسی می‌کنیم.

مقاومت

$$R \Rightarrow \begin{aligned} v(t) &= V_m\cos(\omega t) \\ i(t) &= I_m\cos(\omega t) \\ p(t) &= v(t)i(t) = V_m I_m cos^2(\omega t) \end{aligned}$$





القاگر

L ➡ $Z_L = \omega L \angle 90°$ ➡ $v(t) = V_m \cos(\omega t)$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - 90°) = I_m \sin(\omega t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{V_m I_m}{2}\sin(2\omega t)$$

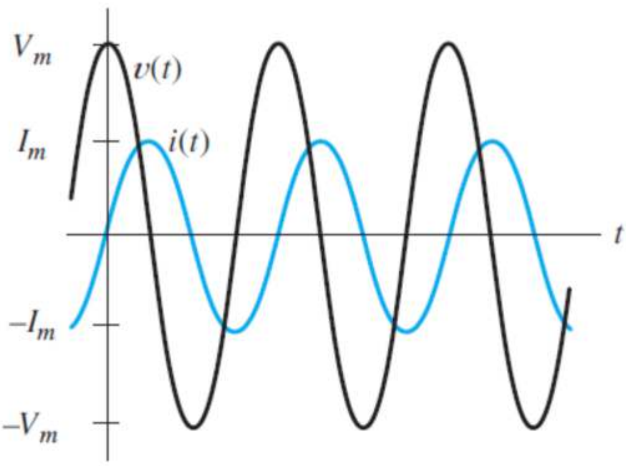
خازن

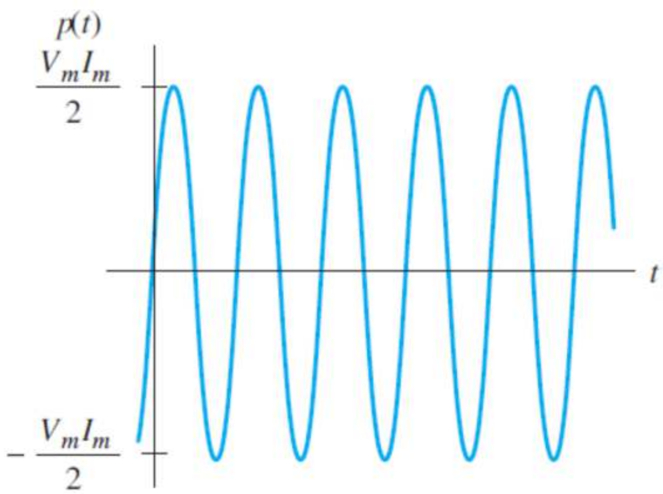
C ➡ $Z_C = \frac{1}{\omega C}\angle -90°$ ➡ $v(t) = V_m \cos(\omega t)$

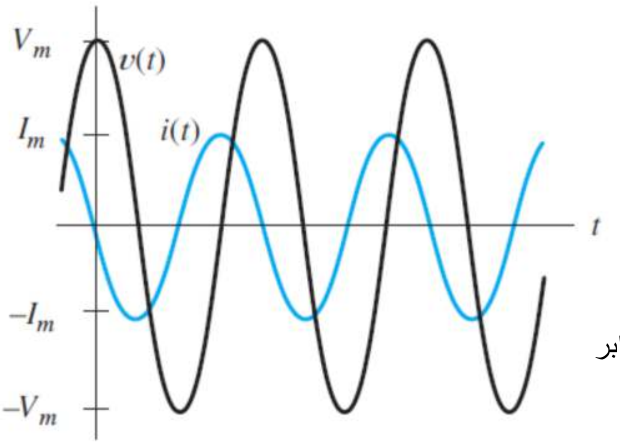
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + 90°) = -I_m \sin(\omega t)$$

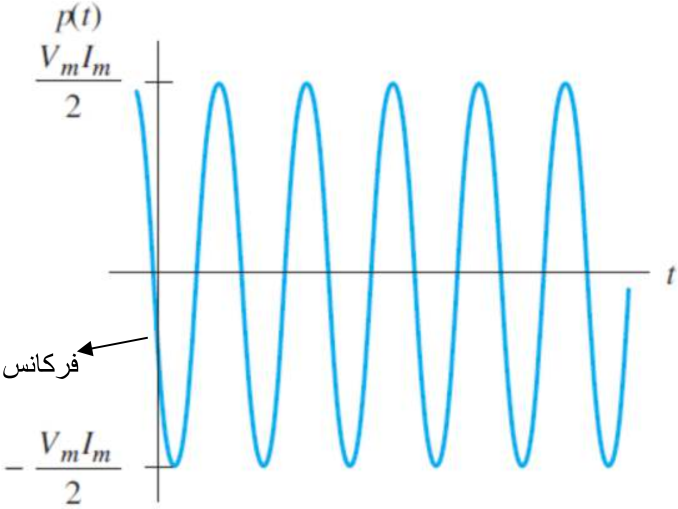
$$p(t) = -V_m I_m \sin(\omega t)\cos(\omega t) = -\frac{V_m I_m}{2}\sin(2\omega t)$$

فرکانس دو برابر









توجه کنید که در مورد القاگر و خازن توان متوسط صفر است. در واقع نیمی از زمان انرژی از منبع به خازن یا القاگر منتقل می‌شود (توان مثبت) و در نیمی از زمان انرژی در خازن / القاگر به منبع برگردانده می‌شود (توان منفی) به این شکل از توان، توان راکتیو(انتقالی) گفته می‌شود.

- در حالت توان راکتیو خطوط انتقال، فیوزها، ترانسفورها و سایر المان‌ها می‌بایست توانایی تحمل بیشتر از توان متوسطا داشته باشند. دلیل این موضوع این است که به دلیل وجود توان راکتیو، جریان بیشتری در بازه ای از زمان کشیده می‌شود که مدار باید طوری طراحی شود که بتواند آن را تحمل کند.

برای یک لمان کلی RLC داریم :

$$Z = |Z|\angle\theta \Longrightarrow \begin{array}{l} v(t) = V_m\cos(\omega t) \\ i(t) = I_m\cos(\omega t - \theta) \end{array}$$

$$p(t) = V_m I_m\cos(\omega t)\cos(\omega t - \theta) = \frac{V_m I_m}{2} cos\theta(1 + \cos(2\omega t)) + \frac{V_m I_m}{2} sin\theta\sin{(2\omega t)}$$

توان متوسط $\Longrightarrow P = \frac{V_m I_m}{2} cos\theta \xrightarrow[I_{rms} = {V_m}/{\sqrt{2}}]{V_{rms} = {V_m}/{\sqrt{2}}}$ $P = V_{rms} I_{rms}\, cos\theta$

ترم $\cos\theta$ عامل توان (Power Factor) گفته می‌شود. $PF = cos\theta$

حقیقت عامل توان برحسب فازولتاژ و فازجریان به شکل زیر تعریف میشود: $PF = \cos(\theta_v - \theta_i)$

در واقع مقدار $\theta = \theta_v - \theta_i$ زاویه توان (Power Angle) نامیده می شود.

توان راکتیو (Reactive Power) :

در یک مدار AC انرژی به و از المان‌های ذخیره انرژی(خازن و القاگر) جریان پیدا می‌کند. به طور مثال وقتی اندازه ولتاژ دو سر یک خازن در حال افزایش است انرژی به آن منتقل می‌شود و وقتی ولتاژ کاهش می‌یابد انرژی از آن خارج می‌شود. به طور مشابه در یک القاگر وقتی اندازه جریان افزایش می‌یابد انرژی در آن ذخیره می‌شود و با کاهش جریان انرژی از آن خارج می‌شود. بنابراین توان کل منتقل شده به هر یک از این المان‌ها در یک سیکل، صفر است. توان لحظه حداکثر مربوط به یک المان ذخیره انرژی توان راکتیو گفته می‌شود که به برابر است با:

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta)$$

زاویه توان

توجه کنید که طبق فرمول بالا برای یک مقاومت داریم $\theta=0$ و در نتیجه Q=0. واحد توان راکتیو مانند هر توان وات است. البته برای تاکید بر اینکه Q جریان کل انرژی را نشان نمی دهد واحد آن را با ولت – آمپر – راکتیو Volt-Amper-Reactive (VAR) نشان می دهند.

توان ظاهری :

توان ظاهری به شکل زیر تعریف می شود: $\text{توان ظاهری} = V_{rms} I_{rms}$

واحد آن ولت آمپر (VA) است. برای به دست آوردن رابطه بین توان ظاهری ، توان و توان راکتیو داریم:

$$P^2 + Q^2 = (V_{rms} I_{rms})^2 cos^2\theta + (V_{rms} I_{rms})^2 sin^2\theta = (V_{rms} I_{rms})^2$$

برای تشخیص اینکه توان داده شده از چه نوع است به واحد آن دقت می شود :

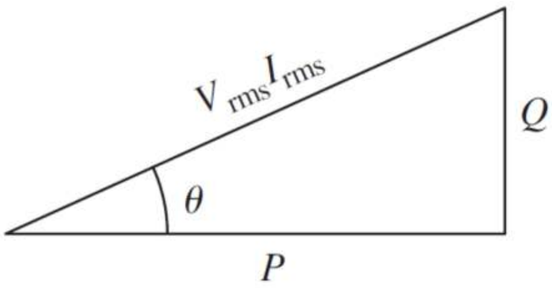
توان $\longrightarrow$ W

توان ظاهری $\longrightarrow$ VA

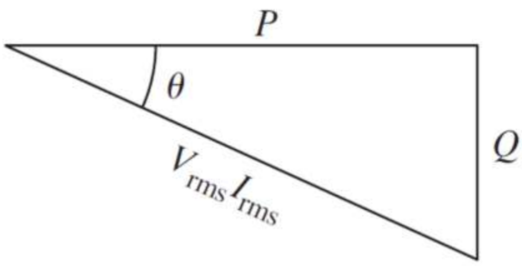
توان راکتیو $\longrightarrow$ VAR

$$P^2 + Q^2 = V_{rms}^2 I_{rms}^2$$

رابطه بین توان واقعی p ، توان راکتیو Q و توان ظاهری $V_{RMS} I_{RMS}$ زاویه توان θ را می توان با مثلث نشان داد .



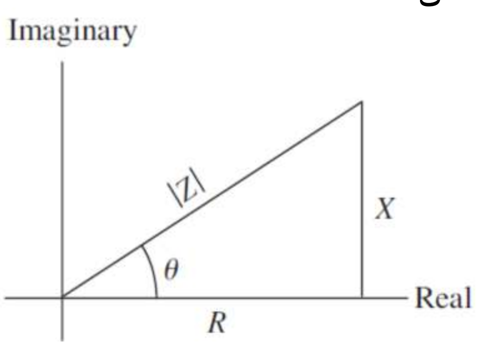
بار القایی (θ مثبت)



بار خازنی (θ منفی)

به همین شکل می توان امپدانس بار Z را به شکل $Z = R + Xj = |Z|Z\theta$ نشان داد

که R مقاومت حقیقی و X راکتانس است.



$$cos\theta = \frac{R}{|Z|} \qquad sin\theta = \frac{X}{|Z|}$$

داریم :

$$P = V_{rms} I_{rms} cos\theta = \frac{V_m I_m}{2} cos\theta = \frac{V_m I_m}{2} \times \frac{R}{|Z|} \xrightarrow{\frac{V_m}{|Z|} = I_m} P = I_{rms}^2 R$$

به طور مشابه داریم:

$$Q = I_{rms}^2 X$$

$$\Rightarrow P = Re(S) \quad , \quad Q = I_m(S)$$

توان مختلط (Complex Power):

توان مختلط به شکل S زیر تعریف می شود:

$$S=\frac{1}{2}V I^{*}=\frac{1}{2}(V_m\angle\theta_v)(I_m\angle-\theta_i)=\frac{V_mI_m}{2}\angle(\theta_V-\theta_i)=\frac{V_mI_m}{2}\angle\theta$$

مزدوج فازور جریان

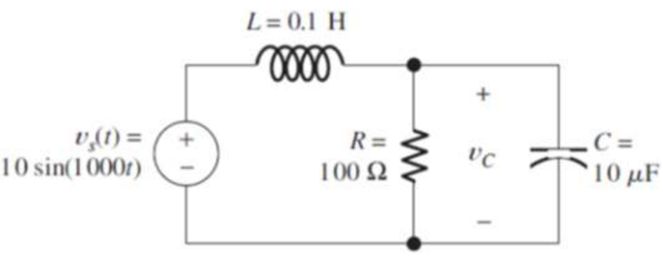
$$=\frac{V_mI_m}{2}\cos\theta+j\,\frac{V_mI_m}{2}\sin\theta=P+j\,Q$$

$$\Rightarrow\quad P=R_e(S)\quad,\quad Q=I_m(S)$$

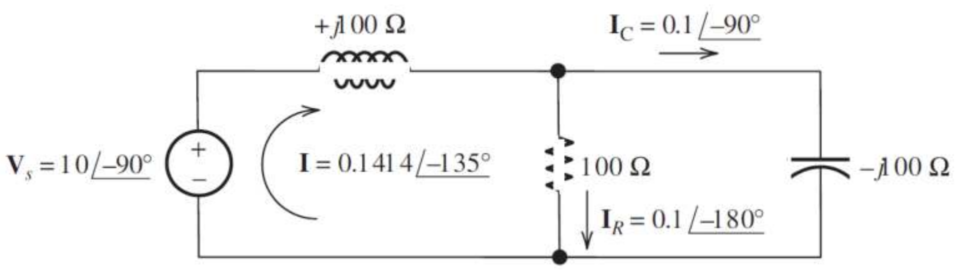
مثال :

مقدار توان حقیقی و توان راکتیو گرفته شده از منبع را در مدار مقابل محاسبه کنید.

همچنین توان داده شده به هر المان (توان حقیقی و توان راکتیو) را محاسبه کنید.



این مثال قبلا حل شده (چند صفحه قبل)



$$V_{srms}=\frac{|V_2|}{\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=7.071\ V$$

$$I_{rms}=\frac{|I|}{\sqrt{2}}=\frac{0.14}{\sqrt{2}}=0.1\ A$$

$$P=V_{srms}I_{rms}\cos\theta=7.07\times0.1\times\cos\underbrace{\left(-90-(-135)\right)}_{45^\circ}=0.5\ W$$

$$Q=V_{srms}\,I_{rms}\sin\theta=7.07\times0.1\sin(45^\circ)=0.5\ VAR$$

یا

$$S=\frac{1}{2}V_2I^{*}=\frac{1}{2}(10\angle-90^\circ)(0.14\angle135^\circ)=0.7\angle45^\circ=0.5+0.5\,j$$

$$P=Re(S)=0.5\ W$$

$$Q=Im(s)=0.5\ VAR$$

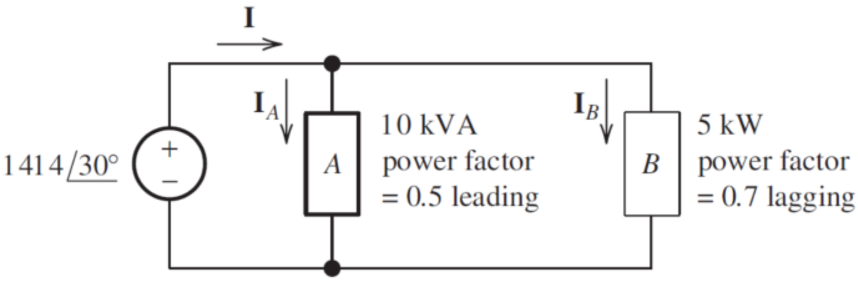
$$Q_L=I_{rms}^2X_L=(0.1)^2(100)=1.0\ VAR$$

$$Q_C=I_{Crms}^2X_C=\left(\frac{0.1}{\sqrt{2}}\right)^2(-100)=-0.5\ VAR$$

$.Q=Q_L+Q_C$

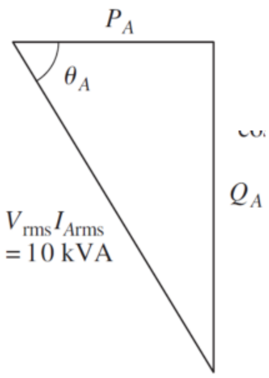
می توان دید که

مثال :



مدار شکل مقابل را در نظر بگیرید که در آن منبع ولتاژ توان را به دو بازه موازی می‌دهد. توان ، توان راکتیو و ضریب توان را برای منبع بیابید. فازور جریان i را بنویسید.

توجه کنید که برای بار A فاز جریان از فاز ولتاژ جلوتر است، می‌توان گفت بار از نوع خازنی است. برای بار B فاز ولتاژ از فاز جریان پیش است یا می‌توان گفت که بار از نوع القایی است. نتیجه می‌شود برای بار A زاویه توان منفی است و برای بار B زاویه توان مثبت است.



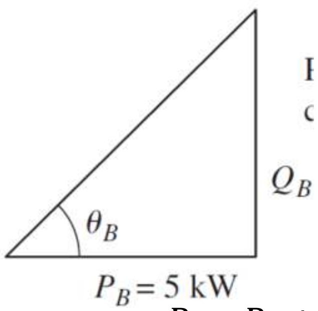
$$\cos\theta_A = PF = 0.5$$

$$P_A = V_{rms}I_{Arms}cos\theta_A = 10^4 \times 0.5 = 5kW$$

$$Q_A = \sqrt{(V_{rms}I_{Arms})^2 - P_A^2} = -8.66\ kVAR$$

$$PF = 0.7 = cos\theta_B \quad \Rightarrow \theta_B = 45.6°$$

$$Q_B = P_B tg(\theta_B) = 5.1\ kVAR$$



$$P = P_A + P_B = 5 + 5 = 10kW$$

$$Q = Q_A + Q_B = -8.66 + 5.1 = -3.56\ kVAR$$

$$\theta = Arctg\left(\frac{Q}{P}\right) = Arctg\left(-\frac{3.56}{10}\right) = -19.6° \quad \Rightarrow PF = cos\theta = 0.94$$

$$S = P + Qj = 10 - 3.56\,j = 10.61\angle - 19.6°kVA$$

$$S = \frac{1}{2}V_sI^* = \frac{1}{2}(1414\angle 30°)I^* = 10.61 \times 10^3\angle - 19.6°\ kVA$$

توجه کنید که فاز جریان از ولتاژ پیش است.

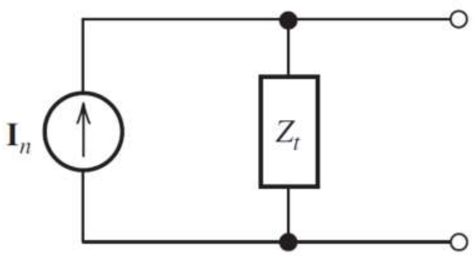
$$\Rightarrow \boxed{I = 15.0\angle 49.6°A}$$

معادله تونن و نورتن :

می‌توان مشابه آنچه که در بخش‌های قبل برای معادل تونن مدارهای DC شامل مقاومت داشتیم به حالت مدارهایی با منابع سینوسی (با فرکانس یکسان) شامل مقاومت، خازن و القاگر تعمیم داد مشابه شکل مقابل معادل تونن شامل یک فازور منبع و ولتاژ به صورت سری با یک امپدانس مختلط است. توجه شود که این فازورها و امپدانس‌های مختلط برای تحلیل مدار در حالت پایدار Steady-Statc است. بنابراین معادل تونن داده شده فقط برای حالت پایدار قابل استفاده است. مشابه آنچه از قبل داشتیم $V_t = V_{oc}$ برای یافتن امپدانس Z_t کافی است منابع مستقل را صفر کنیم و امپدانس معادل را بیابیم راه دوم این است که فازور جریان اتصال کوتاه I_{sc} را بیابیم و با دانستن V_{oc} داریم:

$$Z_t = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

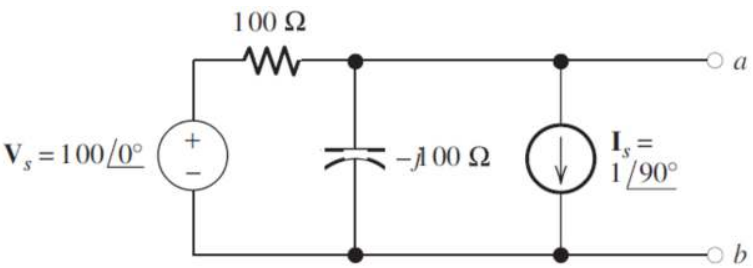
معادل نورتن هم مشابه شکل مدار را با یک فازور منبع جریان I_n به صورت موازی با امپدانس تونن جایگزین می‌کنیم همانطور که می‌دانیم فازور جریان نورتن برابر است با فازور جریان اتصال کوتاه مدار اصلی.



$$I_n = I_{sc}$$

مثال :

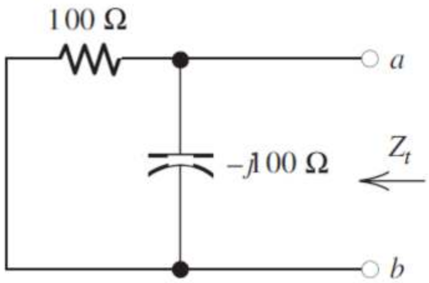
معادل تونن و نورتن مدار مقابل را بیابید.



باید در کمیت از سه کمیت Z_t , I_n , V_t را محاسبه کنیم

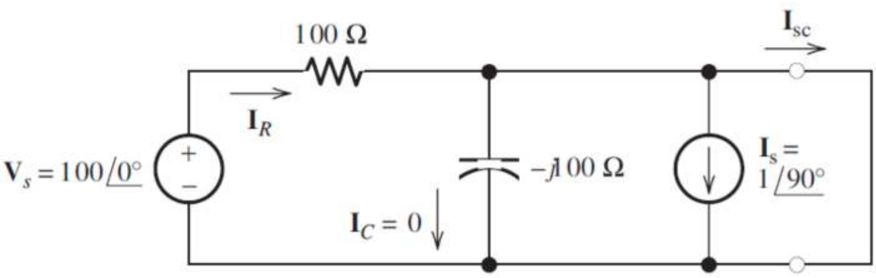
و کمیت سوم از رابطه $Z_t = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$ به دست می‌آید.

ابتدا Z_t محاسبه می کنیم و سپس I_n را که برابر I_{sc} است.



$$Z_t = \frac{1}{{}^{1}/_{100} + {}^{1}/_{-100\,j}} = \frac{1}{0.01 + 0.01\,j} = \frac{1}{0.014\angle 45°}$$

$$= 70.71\angle -45° = \boxed{50 - 50\,j}$$



با اتصال کوتاه خازن از مدار خارج می شود

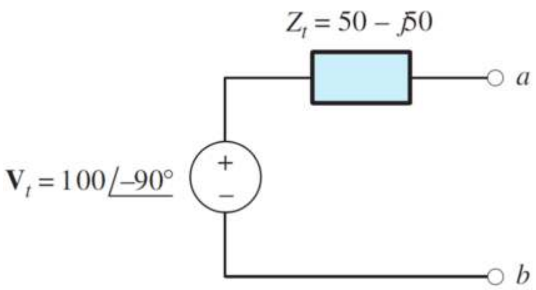
بنابراین $I_C = 0$

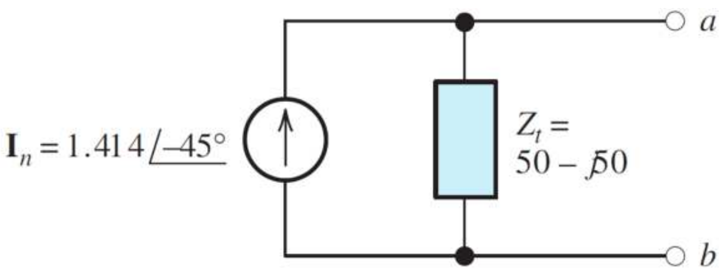
از طرفی دو سر منبع ولتاژ به دو سر مقاومت $100\,\Omega$ متصل است بنابراین

$$I_R = \frac{V_s}{100} = \frac{100\angle 0°}{100} = 1\angle 0°\ A$$

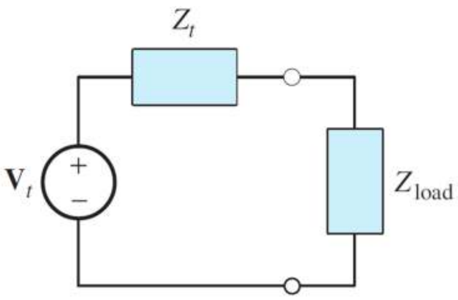
$$KCL \longrightarrow I_{sc} = I_R - I_s = 1\angle 0° - 1\angle 90° = 1 - j = \boxed{1.41\angle -45° A}$$

$$V_t = I_{sc} Z_t = (1.41\angle -45°)(70.71\angle -45°) = \boxed{100\angle -90° V}$$





ماکزیمم توان متوسط انتقالی (Maximum Average Power Transfer):



در این مسأله هدف یافتن یک امپدانس بار مناسب است تا توان حداکثر توان متوسط را از یک مدار با دو ترمینال به دست می‌آورد. به طور مثال یک بار کاملا راکتیو (یک خازن یا یک القاگر) هیچ توانی دریافت نمی‌کند چون ضریب توان صفر است.

ثابت می شود $Z_{load} = Z_t^*$ حداکثر توان انتقالی را بدست می دهد.

مزدوج

$Z_t = R_t + jX_t \qquad Z_{load} = Z_t^* = R_t - jX_t$

$Z_{total} = Z_t + Z_{load} = 2R_t$

بنابراین در این حالت راکتانس بار راکتانس امپدانس تونن حذف می کند.